

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques

École doctorale Information, Structure, Systèmes (ED 166)

Unité de recherche IMAG, UMR 5149

MÉTRIQUES DE KÄHLER CANONIQUES SUR LES VARIÉTÉS SPHÉRIQUES

Présenté par Thibaut DELCROIX
le 30 mai 2024

Devant le jury composé de

Vestislav APOSTOLOV, Professor, Université du Québec à Montréal
Michele BOLOGNESI, Professeur des universités, Université de Montpellier
Philippe EYSSIDIEUX, Professeur des universités, Université Grenoble Alpes
Vincent GUEDJ, Professeur des universités, Université Paul Sabatier
Marc HERZLICH, Professeur des universités, Université de Montpellier
Boris PASQUIER, Professeur des universités, Université de Poitiers

Rapporteur

Président du jury
Rapporteur

D'après les rapports de Vestislav APOSTOLOV, Vincent GUEDJ, et

Simon DONALDSON, Professor, Imperial College

Rapporteur



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

Je déclare avoir respecté, dans la conception et la rédaction de ce mémoire d'HDR, les valeurs et principes d'intégrité scientifique destinés à garantir le caractère honnête et scientifiquement rigoureux de tout travail de recherche, visés à l'article L.211-2 du Code de la recherche et énoncés par la Charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et la Charte d'intégrité scientifique de l'Université de Montpellier. Je m'engage à les promouvoir dans le cadre de mes activités futures d'encadrement de recherche.

La géométrie Kählérienne forme un domaine où les interactions entre la géométrie algébrique et la géométrie différentielle sont fructueuses et, souvent, inévitables. Mon travail de recherche porte principalement sur l'existence, ou non, de métriques Kählériennes canoniques sur les variétés complexes, c'est-à-dire des métriques qui respectent et révèlent des propriétés importantes de ces variétés : symétries, courbure, possibilité d'en former de bons espaces de modules,...

Du côté de la géométrie différentielle, mon travail porte donc sur l'existence ou non de solutions à des équations aux dérivées partielles non linéaires sur les variétés différentielles sous-jacentes. Du côté de la géométrie algébrique, mon travail porte sur la K-stabilité, une notion qui a vu le jour il y a une trentaine d'années, pour devenir un des sujets d'étude majeurs actuellement.

Si la relation entre ces deux aspects est de mieux en mieux comprise (grâce notamment à la résolution de la conjecture YTD dans le cas des métriques Kähler-Einstein sur les variétés Fano), chacun d'eux reste relativement mystérieux en général. Pour mieux comprendre, il faut étudier ces problèmes sur des variétés dont on connaît déjà, un peu, la géométrie. Je me suis concentré, depuis ma thèse, sur le cas des variétés sphériques. Il s'agit de variétés qui ont beaucoup de symétries (tout un groupe de matrices à coefficients complexes, par exemple $GL_n(\mathbb{C})$), et qui sont encodées de manière combinatoire (généralisant la correspondance mieux connues entre variétés toriques et polytopes).

J'ai obtenu, sur ces variétés, des critères combinatoires effectivement vérifiables d'existence de métriques canoniques et de K-stabilité. J'ai aussi obtenu des exemples pour lesquels aucune métrique canonique raisonnable ne semble exister, et étudié les phénomènes de dégénérescence lorsque les métriques canoniques n'existent pas (de manière équivalente, dans le cas K-instable).

Remerciements

Les premiers remerciements reviennent, bien sûr, à ceux qui m'ont fait l'honneur de consacrer leur temps à l'écriture de rapports : Vestislav Apostolov, Simon Donaldson, et Vincent Guedj. Ils ont tous les trois largement participé à mon développement en tant que chercheur, par leur travaux, les directions de recherches qu'ils ont mis en lumière, leur intérêt pour ma recherche... Ils ne sont pas les seuls, bien sûr, et la longue liste qui suit n'en sera qu'un aperçu, présenté assez maladroitement en énumération...

Viennent ensuite les membres du jury : Michele Bolognesi, Philippe Eyssidieux, Marc Herzlich et Boris Pasquier. Merci à Marc aussi d'avoir accepté d'être le directeur officiel de Trung, à Michele de m'avoir accompagné pour le choix des rapporteurs et pour les invités de géométrie complexe à AGATA, à Boris pour avoir donné les meilleures preuves des différences entre variétés toriques et sphériques, à Philippe pour la thèse, et les nombreux conseils depuis.

Je tiens aussi à remercier ceux qui m'ont aidé à obtenir des postdocs, en particulier Olivier Biquard et Charles Frances. Mes collaborateurs, Olivier Biquard encore, Jakob Hultgren, Simon Jubert, Pierre-Louis Montagard. Tran Trung Nghiem et Bilal Maoui pour travailler en thèse avec mon encadrement, ainsi que King Leung Lee pour notre collaboration sur son postdoc. Les membres de l'ANR MARGE, Eleonora Di Nezza, Eveline Legendre, Carl Tipler, Tat Dat Tô et ceux de l'ANR FIBALGA, Ronan Terpereau, Boris Pasquier, Susanna Zimmermann, Enrica Floris, Adrien Dubouloz, pour les rencontres et interactions stimulantes. Ceux avec qui je prends plaisir à discuter régulièrement de recherche et avec qui j'aimerais, un jour, partager des projets de recherche, comme Sébastien Boucksom, Henri Guenancia...

Un peu moins directement, mes collègues ont influencé ma recherche, ainsi que mon enseignement, ma carrière, etc. À Montpellier, notamment Philippe Castillon pour le bureau partagé, François Fillastre, Pascal Azerad pour le calcul diff, Clément Dupont pour les groupes de travail, Damien Calaque, Ricardo Campos pour le séminaire AGATA, ceux déjà mentionnés et les autres. Merci aussi aux collègues du côté administratif, et en particulier Nathalie Collain et Carmela Madonia avec lesquelles j'ai le plus souvent l'occasion d'interagir. À Strasbourg, l'équipe de Géométrie en 2018-2019, et en particulier ceux qui sont restés à peine plus longtemps que moi et avec qui j'ai partagé une année très riche : Florent Schaffhauser, Georgios Kydonakis, Federica Fanoni, etc. À Paris, que ce soit à l'ENS (Olivier Biquard, Olivier Debarre, Nicolas Tholozan...), à Jussieu (Junyan Cao, Louis Ioo, Nicolina Istrati,...) à Orsay (Hoang Chinh Lu,...). Et aussi à Toulouse pour six mois non-officiels après ma soutenance de thèse : Eveline Legendre, Vincent Guedj encore, Ahmed Zeriahi, Zakarias Sjoström Dyrefelt,...

Il y a aussi les collègues ailleurs. Merci aux co-organisateur·s de conférences, Liana Heuberger et Susanna Zimmermann pour Oberwolfach, Benoît Cadorel et Enrica Floris pour le CIRM à venir, Pierre-Louis Montagard pour les journées TLAG, Georgios Kydonakis et Florent Schaffhauser pour cette conférence bien difficile à maintenir pendant le covid. Merci à Xiaohua Zhu pour une invitation à Pékin, à Gang Tian, Bin Zhou, Yan Li pour leur intérêt pour mes travaux. Merci à Takayuki Koike pour une invitation à Osaka, à Jun-Muk Hwang pour une invitation à Daejeon, merci encore à Kyeong Dong Park, Dongseon Hwang, Shin Young Kim pour leur intérêt également. Merci à tous les autres organisateurs de conférences auxquelles j'ai participé, en particulier Vanya Cheltsov ces dernières années, j'espère bientôt contribuer plus directement à l'édifice construit autour de lui sur la K-stabilité effective des Fano de dimension trois. Merci à mes visiteurs à Montpellier, qui m'apprennent toujours beaucoup que je ne peux leur apprendre, Anna Bot, Carlo Scarpa, Anamaria Ortu, Pierre-Alexandre Gillard, Tiago Duarte Guerreiro, Nivedita Viswanathan... Merci à d'autres collègues et amis, qui enseignent maintenant en prépa, Roland Abuaf, Louis-Clément Lefèvre.

Enfin, merci à ma famille d'être là, Bérénice, Arsène, Basile qui donnent à ma vie toutes ses couleurs, à mes parents, ma soeur, mon frère, mes grand-mères, et tous les autres membres de la famille au sens plus large.

- [Del20a] K-stability of Fano spherical varieties, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (4). Volume 53, Issue 3 (2020), pages 615–662
<https://doi.org/10.24033/asens.2430>
- [Del20b] Kähler geometry of horosymmetric varieties, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*. Volume 2020, Issue 763, pages 129–199
<https://doi.org/10.1515/crelle-2018-0040>
- [BD19] Avec Olivier Biquard : Ricci flat Kähler metrics on rank two complex symmetric spaces, *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*. Tome 6 (2019), pp. 163–201
<https://doi.org/10.5802/jep.91>
- [DH21] Avec Jakob Hultgren : Coupled complex Monge-Ampère equations on Fano horosymmetric manifolds. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Volume 153, pages 281–315 (2021)
<https://doi.org/10.1016/j.matpur.2020.12.002>
- [Del22] Examples of K-unstable Fano manifolds. *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 72 no. 5, 2079–2108 (2022)
<https://doi.org/10.5802/aif.3505>
- [Del23c] Avec un appendice par Yuji Odaka : Uniform K-stability of polarized spherical varieties. *EPIGA*, Volume 7 (2023)
<https://doi.org/10.46298/epiga.2022.9959>
- [Del23b] The Yau-Tian-Donaldson conjecture for cohomogeneity one manifolds. In : Cheltsov, I., Chen, X., Katzarkov, L., Park, J. (eds) *Birational Geometry, Kähler–Einstein Metrics and Degenerations*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 409
https://doi.org/10.1007/978-3-031-17859-7_10
- [DJ23] Avec Simon Jubert : An effective weighted K-stability condition for polytopes and semisimple principal toric fibrations, *Annales Henri Lebesgue*, Volume 6 (2023), pp. 117–149
<https://doi.org/10.5802/ahl.161>
- [DM23] Avec Pierre-Louis Montagard, Spherical actions on locally factorial Fano varieties of dimension ≤ 4 and rank ≤ 2 , Prépublication
<https://arxiv.org/abs/2308.15858>
- [Del23a] Limits of conical Kähler-Einstein metrics on rank one horosymmetric spaces, Prépublication
<https://arxiv.org/abs/2310.04062>

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Contexte	11
1.1.1	Formes de Kähler et amplitude	11
1.1.2	Théorème de Calabi-Yau	12
1.1.3	Exemples et contre-exemples	13
1.1.4	K-stabilité et la conjecture de Yau-Tian-Donaldson	14
1.1.5	Métriques cscK et extrémales	15
1.2	Mes travaux	15
1.2.1	Travaux non présentés dans cette synthèse	16
1.2.2	Travaux présentés	16
2	Géométrie algébrique des variétés sphériques	21
2.1	Introduction aux variétés sphériques	21
2.1.1	Groupes réductifs	21
2.1.2	Variétés sphériques	22
2.1.3	Cône des valuations et couleurs	23
2.1.4	Classification des plongements	24
2.1.5	Polytopes moments des variétés sphériques	25
2.2	Classification des variétés sphériques Fano	27
2.2.1	Classification des espaces homogènes	27
2.2.2	Polytopes Fano coloriés	29
2.3	K-stabilité des variétés sphériques Fano	30
2.3.1	K-stabilité	30
2.3.2	Critère combinatoire et exemples	31
2.3.3	Dégénérescences spéciales équivariantes	33
2.4	K-stabilité des variétés sphériques polarisées	33
2.4.1	K-stabilité uniforme	34
2.4.2	Traduction en termes de fonctions convexes	35
2.4.3	Condition suffisante combinatoire	37
2.4.4	Polarisations proche de l'anticanonique	38
2.5	YTD en rang 1	39
2.6	Cas des fibrations principales semisimples	40
2.7	Quelques projets de recherches	42
2.7.1	Fibrations de Mori en petits rangs	42

2.7.2	Complexités supérieures	43
3	Géométrie différentielle des variétés horosymétriques	45
3.1	La classe des variétés horosymétriques	45
3.1.1	Définition	45
3.1.2	Données combinatoires	46
3.1.3	Diviseurs et dégénérescences	47
3.1.4	La sous-variété torique	48
3.1.5	Polytopes moments	48
3.2	Métriques et courbures	50
3.2.1	Quasipotential et potentiel torique	50
3.2.2	Courbure	51
3.2.3	Application à la fonctionnelle de Mabuchi	52
3.3	Métriques canoniques dans l'anticanonique	53
3.3.1	Quelques métriques canoniques alternatives	53
3.3.2	Critère combinatoire	54
3.3.3	Éléments de preuve	56
3.4	Limites de métriques canoniques	57
3.5	Métriques CY à cône asymptotique singuliers	58
3.5.1	Introduction	58
3.5.2	Cônes asymptotiques horosymétriques	59
3.5.3	Thèse de Tran Trung Nghiem : cône horosphérique	60
3.6	D'autres projets de recherche	61
3.6.1	Bulles	61
3.6.2	Dégénérescences	61

1.1 Contexte

Le contexte de ma recherche est bien illustré par le problème de l'existence de métriques Kähler-Einstein sur les variétés de Kähler compactes. Celui-ci prend son origine dans les travaux de Kähler [Käh32], mais a gagné sa célébrité grâce à sa mise en avant par Calabi, puis à la résolution de la conjecture de Calabi par Yau à la fin des années 70 [Yau78]. Depuis cette époque, le domaine a bien évolué, mais reste l'un des plus actifs en géométrie complexe. Les perspectives qu'il a ouvert (je présenterai certaines dans les sections ultérieures) donneront encore du travail à plusieurs générations de chercheurs.

1.1.1 Formes de Kähler et amplitude

Une *métrique de Kähler* ω sur une variété complexe X de dimension n est une 2-forme différentielle qui s'écrit localement sous la forme

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\varphi := i \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

où (z_1, \dots, z_n) sont des coordonnées holomorphes sur un ouvert U de X , et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse dont la matrice hessienne complexe $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)_{j,k}$ est, en tout point, une matrice hermitienne définie positive. La variété complexe X est dite *de Kähler* s'il existe une métrique de Kähler globale ω sur X . Cette notion se trouve à la confluence de diverses géométries : la géométrie complexe bien sûr, mais aussi la géométrie symplectique (car ω est en particulier une *forme symplectique*) et la géométrie riemannienne (car $g_\omega : (v, w) \mapsto \omega(v, w)$ définit une *métrique Riemannienne* sur X). De plus, la forme ω est fermée, et définit donc une *classe de cohomologie* $[\omega]$.

Un fibré en droites (complexes) hermitien (L, h) sur X fournit une 2-forme ω_h sur X , la *forme de courbure* de h , qui s'exprime localement comme $i\partial\bar{\partial}\varphi$ pour une fonction φ . Plus précisément, si $s : U \rightarrow L$ est une trivialisatoin locale (une section partout non-nulle), la fonction φ est donnée par

$$\varphi(z) = -2 \ln |s(z)|_h$$

Lorsque cette 2-forme est de Kähler, le fibré en droite L est dit *positif*.

Supposons X compacte, alors par le théorème de plongement de Kodaira [Kod54], la positivité de L est équivalente à la propriété algébro-géométrique d'*amplitude*, qui assure qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que le morphisme (a priori rationnel) $X \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L^k)^*)$ qui à x associe l'évaluation en x d'une section, soit un plongement. Dans ce cas, la variété X se réalise comme une sous-variété d'un espace projectif complexe, on dit qu'elle est *projective*.

Cette relation entre la notion métrique de positivité et la notion algébrique d'amplitude est l'un des exemples fondamentaux des interactions entre géométrie différentielle et géométrie algébrique qui sont au centre de la géométrie complexe. Mon travail s'inscrit largement dans cette ligne, autour de la conjecture de Yau-Tian-Donaldson qui relie existence de métriques de Kähler canoniques et la notion algébrique de K-stabilité. Présentons dès maintenant le cas des métriques Kähler-Einstein.

1.1.2 Théorème de Calabi-Yau

Étant donné une métrique de Kähler ω , la forme de plus haut degré associée $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ est une forme volume sur X . Localement, elle s'exprime

$$\omega^n = n! \det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) (idz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \cdots \wedge (idz_n \wedge d\bar{z}_n)$$

Cette forme volume détermine une métrique hermitienne h_{ω^n} sur le fibré canonique K_X , le fibré des formes volumes holomorphes, dont les éléments de la fibre peuvent s'écrire

$$\xi = \lambda dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

dans des coordonnées holomorphes locales, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet, il suffit de poser

$$|dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n|_{h_{\omega^n}} = \frac{\omega^n}{(idz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \cdots \wedge (idz_n \wedge d\bar{z}_n)}$$

On note la forme de courbure $\omega_{h_{\omega^n}}$ associée par $\text{Ric}(\omega)$. Cette définition, au premier abord un peu arbitraire, permet de retrouver sous une expression très simple la notion de *courbure de Ricci* de la métrique Riemannienne g_ω : le 2-tenseur de courbure de Ricci est encodé par la forme de courbure $\text{Ric}(\omega)$.

En géométrie Riemannienne, la courbure de Ricci est une information fondamentale sur une variété, et on appelle *métriques d'Einstein* les métriques dont la courbure de Ricci est constante, c'est-à-dire telles que le 2-tenseur de courbure de Ricci est un multiple réel du 2-tenseur de la métrique Riemannienne. Dans le cadre d'une variété de Kähler, cette relation se traduit par l'équation

$$\text{Ric}(\omega) = t\omega \tag{1.1}$$

pour un $t \in \mathbb{R}$. Localement, on peut observer que cette équation est impliquée par l'équation

$$\det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) = e^{-t\varphi}$$

Dans son travail fondateur [Yau78], Yau utilise cette observation de manière globale, via le lemme du $\partial\bar{\partial}$, pour interpréter l'équation comme une EDP sur la variété, dont l'inconnue est une fonction scalaire $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Par une méthode de continuité et en obtenant des estimées a priori remarquables (dont certaines ont été améliorées depuis, mais d'autres sont

encore les meilleures disponibles), Yau a montré l'existence de métriques Kähler-Einstein sur les variétés complexes dont la première classe de Chern est définie négative, ou nulle. La *première classe de Chern* de X est la classe de cohomologie définie par la forme de courbure d'une métrique hermitienne sur le fibré anticanonique K_X^{-1} , et elle est dite (*définie*) *négative* si elle contient un représentant de la forme $-\omega$, avec ω une forme de Kähler. En général, la première classe de Chern $c_1(L)$ d'un fibré en droite L sur X est la classe de cohomologie commune définie par les formes de courbures de métriques hermitiennes sur L .

Lorsqu'on prend les classes de cohomologie dans l'équation (1.1), on obtient $c_1(X) = t[\omega]$, donc si ω est Kähler-Einstein, on a trois possibilités selon le signe de t : soit $c_1(X)$ est définie négative, soit $c_1(X) = 0$, soit $c_1(X)$ est définie positive (c'est la classe d'une forme de Kähler). Dans ce dernier cas, on dit que X est une *variété Fano*. Le théorème de Calabi-Yau laisse donc ouvert le cas des variétés Fano, qui a occupé bon nombre de chercheurs en géométrie complexe depuis.

1.1.3 Exemples et contre-exemples

L'exemple de base de variété complexe est la droite projective complexe

$$\mathbb{P}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*} = \{[x : y] \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$$

recouverte par deux ouverts de coordonnées $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ définis respectivement par $x \mapsto [x : 1]$ et $y \mapsto [1 : y]$, recollés le long de $x \mapsto 1/x$. La *forme de Fubini-Study* sur \mathbb{P}^1 est certainement la forme de Kähler non-triviale la mieux connue, qui s'exprime, dans un ouvert de coordonnées, par

$$\omega_{FS} = i\partial\bar{\partial} \ln(1 + x\bar{x}) = \frac{idx \wedge d\bar{x}}{(1 + x\bar{x})^2}$$

On a dans ce cas,

$$\text{Ric}(\omega_{FS}) = i\partial\bar{\partial} \left(-\ln \left(\frac{1}{(1 + x\bar{x})^2} \right) \right) = 2\omega_{FS}$$

donc ω_{FS} est une forme Kähler-Einstein, et \mathbb{P}^1 est une variété Fano.

La variété \mathbb{P}^1 est le premier exemple, aussi, de variété projective homogène sous l'action d'un groupe de Lie compact par biholomorphismes. Ici, c'est le groupe compact SU_2 qui agit transitivement sur \mathbb{P}^1 . La forme de Fubini-Study est invariante sous l'action de ce groupe, ainsi que sa forme de Ricci, et une 2-forme fermée sur \mathbb{P}^1 , invariante sous SU_2 , est uniquement déterminée par sa classe de cohomologie. On peut ainsi retrouver que l'équation Kähler-Einstein est satisfaite simplement par les classes de cohomologie, et cette preuve s'étend à toutes les variétés projectives homogènes sous l'action d'un groupe de Lie compact. Notons qu'une variété homogène projective qui est homogène sous l'action d'un groupe de Lie réductif complexe est aussi homogène sous l'action de ses sous-groupes compacts maximaux. Ainsi, on obtient de nombreux exemples de métriques Kähler-Einstein, par exemple sur l'espace projectif \mathbb{P}^n (on retrouve la métrique de Fubini-Study), les Grassmanniennes, les quadriques Q^n , les variétés de drapeaux,...

Si dans ce cas, les automorphismes permettent de montrer l'existence de métriques Kähler-Einstein, les obstructions à l'existence de telles métriques connues avant les années 90 étaient aussi dues aux automorphismes. La première obstruction est due à Matsushima [Mat57] : le groupe d'automorphismes d'une variété qui admet une métrique Kähler-Einstein est un groupe réductif. Ceci permet de donner de nombreux exemples de variétés sans métriques Kähler-Einstein, parmi les variétés Fano. Par exemple, l'éclatement $\text{Bl}_{\mathbb{P}^k} \mathbb{P}^n$ de \mathbb{P}^n le

long d'un sous-espace linéaire \mathbb{P}^k a un groupe d'automorphismes non-réductif. Matsushima montre de plus que le groupe d'isométries holomorphes d'une métrique Kähler-Einstein est un sous-groupe compact maximal du groupe d'automorphismes. C'est le mieux qu'on puisse espérer, et le théorème d'unicité de Bando et Mabuchi [BM87] précise que, s'il existe des métriques Kähler-Einstein sur une variété Fano, celles-ci sont précisément paramétrées par le quotient du groupe d'automorphismes par un de ses sous-groupes compact maximaux.

Une autre obstruction, qui après quelques péripéties a donné lieu à la notion de K-stabilité, fut trouvée par Futaki [Fut83]. Si X est Fano, quitte à multiplier la forme par un réel positif, on peut supposer $t = 1$ dans l'équation (1.1). Alors comme $\text{Ric}(\omega)$ et ω sont deux formes fermées dans la même classe de cohomologie, le lemme du $\partial\bar{\partial}$ assure l'existence d'une fonction h telle que

$$\text{Ric}(\omega) - \omega = i\partial\bar{\partial}h$$

et ω est Kähler-Einstein si et seulement si $\partial\bar{\partial}h = 0$, c'est-à-dire que h est une fonction constante. Soit ζ un champ de vecteur sur X , qui s'identifie à un élément de l'algèbre de Lie $\text{aut}(X)$ du groupe d'automorphisme $\text{Aut}(X)$. Futaki démontre que le nombre $\text{Fut}_X(\zeta) := \int_X (\zeta \cdot h)\omega^n$ est indépendant du choix de la métrique de Kähler ω dans $c_1(X)$. En particulier, s'il existe une métrique Kähler-Einstein, alors cet invariant est nul. La variété $\text{Bl}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2} \mathbb{P}^4$, où \mathbb{P}^1 et \mathbb{P}^2 sont des sous-espaces linéaires disjoints, a un groupe d'automorphismes réductif, mais son invariant de Futaki est non-nul pour certains champs de vecteurs, donc elle n'admet pas de métriques Kähler-Einstein. De même, l'obstruction de Matsushima ne découle pas de l'obstruction de Futaki : il existe des variétés Fano dont l'invariant de Futaki est identiquement nul, mais dont le groupe d'automorphisme n'est pas réductif.

On termine cette section avec l'exemple des variétés toriques. Une variété X est *torique* si elle est munie d'une action fidèle d'un tore complexe $(\mathbb{C}^*)^{\dim X}$ par biholomorphismes. Ces variétés apparaissent naturellement dans différents cadre, et fournissent l'une des familles de variétés complexes dont la géométrie est la mieux comprise (y compris en dimensions élevées!). Remarquablement, leur géométrie algébrique est encodée par des données combinatoires, et leur géométrie différentielle par de la géométrie convexe. On trouve beaucoup de variétés Fano parmi les variétés toriques, et Wang et Zhu [WZ04] ont obtenu, par des estimées analytique C^0 le long de la méthode de continuité de Yau obtenu via l'analyse convexe, un critère combinatoire d'existence de métriques Kähler-Einstein sur les variétés toriques Fano. Plus précisément, une variété torique Fano est encodée par un polytope dans un espace vectoriel réel de dimension finie, et elle admet une métrique Kähler-Einstein si et seulement si le barycentre de ce polytope est l'origine de l'espace vectoriel.

1.1.4 K-stabilité et la conjecture de Yau-Tian-Donaldson

Ce sont Ding et Tian [DT92] qui ont démontré que les obstructions précédentes n'étaient pas suffisantes pour caractériser l'existence de métriques Kähler-Einstein. Étant donné un plongement de X dans un espace projectif \mathbb{P}^N (qui existe puisque X est Fano), ils considèrent une dégénérescence induite par l'action d'un sous-groupe à un paramètre $\sigma : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{PGL}_{N+1}$ de $\text{Aut}(\mathbb{P}^N) = \text{PGL}_{N+1}$. Plus précisément, ils considèrent la limite plate X_0 de la famille des sous-variétés $X_t = \sigma(t)(X)$, indexée par \mathbb{C}^* . C'est a priori un schéma, non irréductible, non réduit. Ils supposent que cette limite est en fait une variété lisse (ou au moins normale), et montrent dans ce cas que, pour le champ de vecteur ζ sur X_0 induit par l'action de σ , on a $\text{Fut}_{X_0}(\zeta) \geq 0$, avec inégalité stricte si X_0 n'est pas isomorphe à X . Tian a de plus proposé un exemple de variété avec un groupe d'automorphisme réductif, un invariant de Futaki identiquement nul, mais une dégénérescence qui viole cette condition [Tia97]. C'est la naissance

de la notion de *K-stabilité* utilisée par la suite pour rendre précise la conjecture émise par Yau qu'il y aurait un pendant algébro-géométrique à l'existence de métriques Kähler-Einstein.

Cette notion a plus tard été traduite en termes purement algébro-géométrique (avec, en particulier, une nouvelle définition de l'invariant de Futaki) par Donaldson [Don02]. La définition donnée par Donaldson impliquait de considérer plus de dégénérescences que Ding et Tian : on n'imposait pas que la limite X_0 soit normale. Les dégénérescences considérées sont appelées des *configurations test*, l'invariant numérique associé l'*invariant de Donaldson-Futaki*, et la K-stabilité est la condition (algébro-géométrique) de positivité de tous ces invariants. La conjecture portait maintenant le nom de *conjecture de Yau-Tian-Donaldson*, et concernait également l'existence d'autres métriques de Kähler canoniques, notamment dans d'autres classes de Kähler que les multiples de $c_1(X)$, et sur des variétés qui ne sont pas Fano.

Dans le cas Fano, Li et Xu [LX14] ont en fait montré que la restriction initialement imposée par Ding et Tian était valable : il suffit de considérer les configurations test spéciales, c'est-à-dire celles dont la fibre centrale X_0 est une variété normale. Peu après, Chen, Donaldson et Sun [CDS15a, CDS15b, CDS15c] ont démontré la conjecture de Yau-Tian-Donaldson dans le cas Fano. Loin de mettre un terme au domaine, ce résultat a motivé de nombreuses recherches ultérieures, parmi lesquelles l'obtention de nouvelles preuves du résultat, son extension à d'autres métriques de Kähler canoniques, et la détermination explicite des variétés Fano qui sont K-stables ou pas.

1.1.5 Métriques cscK et extrémales

La conjecture de Yau-Tian-Donaldson, comme mentionné plus tôt, ne concerne pas uniquement les métriques Kähler-Einstein. Une des classes principales d'autres métriques canoniques a été introduite par Calabi [Cal82] sous le nom de *métriques extrémales*. Il s'agit, comme leur nom le suggère, de métriques qui sont des points critiques pour une fonctionnelle naturelle sur l'espace des métriques de Kähler dans une classe de cohomologie fixée, la norme L^2 de la courbure scalaire. Étant donné une métrique de Kähler ω , sa courbure scalaire s_ω (au sens de la géométrie Riemannienne) peut être définie en termes de la forme de Ricci de ω par l'expression :

$$s_\omega := \frac{n \operatorname{Ric}(\omega) \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n}$$

C'est une fonction sur X , et la fonctionnelle de Calabi est définie par

$$\operatorname{Cal}(\omega) = \int_X s_\omega^2 \omega^n$$

Il existe (parfois) des minimiseurs naturels pour cette fonctionnelle, les métriques à courbure scalaire constante (notées *métriques cscK*). Calabi montre, dès ce premier article [Cal82], que la notion est plus générale : sur les surfaces de Hirzebruch on ne trouve pas de métriques cscK, mais on trouve des métriques extrémales. La K-stabilité telle que définie par Donaldson, est conjecturalement équivalente à l'existence de métriques cscK, et la variante appelée *K-stabilité relative* définie par Székelyhidi [Szé07] est conjecturalement équivalente à l'existence de métriques extrémales.

1.2 Mes travaux

Mes travaux de recherche se situent dans le contexte exposé dans les paragraphes précédents, et seront exposés en détails dans le corps du texte. Avant cela j'en donne un bref aperçu ici.

1.2.1 Travaux non présentés dans cette synthèse

Après un stage de Master 2 sous la direction de Philippe Eyssidieux sur les groupes Kählériens qui a donné lieu à l'article [Del14], j'ai effectué ma thèse sous sa direction. Pendant ma thèse, j'ai d'abord travaillé sur les invariants alpha et seuils log canoniques [Del15, Del17b], qui fournissaient à l'époque l'une des méthodes les plus productives pour montrer l'existence de métriques Kähler-Einstein, via le critère de Tian. Il s'avère que ce critère est remarquablement mal adapté aux variétés munies d'un gros groupe d'automorphisme continu.

Le résultat principal de ma thèse se trouve dans l'article [Del17a]. Dans cet article, j'obtiens un critère combinatoire d'existence de métriques Kähler-Einstein sur les compactifications biéquivariantes de groupes réductifs complexes, qui généralisent de manière naturelle les variétés toriques. La preuve repose sur une compréhension fine de la géométrie de ces variétés, analogue à celle des variétés toriques, et son utilisation pour traduire la méthode de continuité de Yau en un chemin d'équations de Monge-Ampère réelles. Cette approche analytique donne de plus très directement de l'information sur les cas où il n'existe pas de métriques Kähler-Einstein, avec par exemple une mesure numérique du défaut d'être Kähler-Einstein. Le résultat permet d'obtenir à la fois de nouveaux exemples de métriques Kähler-Einstein, et de nouveaux exemples sans métriques Kähler-Einstein, avec un comportement qui n'avait jamais été exhibé plus tôt. Comme on va le voir dans ce mémoire, beaucoup de mes travaux depuis la thèse tirent leur inspiration de ce travail, que ce soit en développant les techniques introduites, en essayant d'obtenir d'autres critères combinatoires explicites d'existences de métriques canoniques, ou en trouvant des exemples remarquables de variétés Kählériennes.

La présente synthèse se concentre sur les publications produites, et ne détaillera pas toutes mes autres activités scientifiques : enseignement supérieur, encadrement d'étudiants de M1, organisation de séminaires, de conférences, activités d'évaluations d'articles et de candidatures, participation à des conférences, des séminaires, des groupes de travaux, des projets ANR, responsabilité de projet ANR, etc.

1.2.2 Travaux présentés

Mes travaux depuis ma thèse ont porté sur différents thèmes, toujours en lien avec l'existence de métriques canoniques sur des variétés ayant beaucoup de symétries. J'ai utilisé à la fois des techniques de géométrie algébrique et de géométrie différentielle (voire d'analyse géométrique) et j'ai divisé le texte en deux parties correspondantes. Cette division, comme l'ordre de présentation des articles dans le texte, ne suit pas l'ordre chronologique de production. Pour remédier à ça, j'en fait ici en guise d'introduction une courte présentation chronologique.

Mon premier travail après ma thèse est l'article [Del20a], écrit en 2016, où j'étudie la K-stabilité des variétés sphériques Fano. Le résultat de ma thèse sur les compactifications de groupes m'a permis, après ma soutenance de thèse en octobre 2015 et des commentaires de Brion, de deviner le critère qui devrait exister pour l'existence de métriques Kähler-Einstein pour les variétés sphériques. Je me suis décidé à suivre l'approche par la K-stabilité après avoir regardé fin 2015 un exposé enregistré de Székelyhidi qui présentait le raffinement de Chen-Donaldson-Sun obtenu par lui et Datar [DS16]. Les techniques utilisées pour [Del20a] faisaient intervenir à la fois la géométrie algébrique et la géométrie différentielle de manière essentielle, car je détaillais dans cet article comment étudier la géométrie différentielle des variétés horosphériques d'une manière similaire aux variétés toriques et aux compactifications de groupes.

Mon postdoctorat à Paris avec Olivier Biquard m'a amené à préciser la géométrie des variétés symétriques de manière similaire à ce que j'avais fait pour les compactifications de groupes, avec pour objectif la construction de métriques de Calabi-Yau sur les espaces symétriques. Avec l'idée de comprendre les cônes asymptotiques possibles, et en parallèle l'idée de préciser les dégénérescences qui apparaissent comme fibres centrales de configurations test pour les variétés symétriques, j'ai formulé la définition de variétés horosymétriques, et compris leur géométrie différentielle dans [Del20b]. Une motivation supplémentaire pour cet article est venue des articles de Li, Zhou et Zhu [LZZ18] qui reprouvaient mon critère sur les compactifications de groupes par une approche variationnelle, et donnaient des applications pour d'autres polarisations. Je généralise leur approche dans la dernière section de [Del20b], et la sortie, un mois après, des résultats de Chen et Cheng [CC21] a montré que ceci donnait des conditions suffisantes d'existence de métriques cscK.

Dans ma collaboration avec Olivier Biquard, nous avons construit de nouveaux exemples de métriques de Calabi-Yau sur des espaces symétriques de rang deux, avec des cônes asymptotiques singuliers. Notre approche reposait sur plusieurs ingrédients : la géométrie des variétés horosymétriques de [Del20b], la construction par Biquard et Gauduchon de métriques hyperkähler explicites sur les espaces symétriques hermitiens, et les techniques générales de construction d'une métrique Calabi-Yau à partir d'une solution asymptotique par Tian-Yau [TY90, TY91], dans la version précisée par la thèse de Hein [Hei10]. Cette construction s'est inscrit dans un contexte où plusieurs constructions de métriques Calabi-Yau à cône asymptotique singuliers sont apparues en même temps, suite à l'exemple de Yang Li sur \mathbb{C}^3 [Li19].

Dans l'article [DH21], nous introduisons avec Jakob Hultgren les solitons à poids couplés (sous le nom de structure multiplicatives hermitiennes couplées, pour coller à la seule terminologie à disposition à l'époque, celle de Mabuchi), et nous montrons un critère combinatoire d'existence de telles métriques, par une approche analytique impliquant une variante de la méthode de continuité de Yau et des estimations a priori à la Wang-Zhu [WZ04] que nous avons chacun déjà utilisés dans des contextes complémentaires [Del17a, Hul19]. J'avais participé en 2017 à une conférence à Nantes, où Jakob et moi avons donné des exposés. J'en avais appris plus à cette occasion sur les métriques Kähler-Einstein couplées, et nous avons discuté alors de l'idée de la collaboration [DH21]. Finalement, il a fallu presque un an avant que j'envoie à Jakob un brouillon, qui contenait plus ou moins le plan général de l'article, avec beaucoup de trous et des preuves un peu ad hoc adaptées parfois maladroitement de ma thèse. En plus de traiter les parties qui lui étaient réservées, Jakob a complètement repris la preuve des estimées C^0 , et simplifié une partie des arguments. Je regrette que ce soit passé un peu inaperçu faute de nouvelles applications...

En présentant les travaux précédents à l'occasion de divers séminaires et diverses conférences, notamment à Cortona et à Shanghai en juin 2019, j'ai isolé dans [Del22] deux familles particulièrement simples et parlantes de variétés sphériques (l'une horosphérique, l'autre symétrique) qui illustrent bien les différentes situations possibles pour l'existence de solitons à poids. Il s'agit de l'éclatement de \mathbb{P}^n en deux sous-espaces linéaires complémentaires, et de l'éclatement de la quadrique Q^n en une sous-quadrique linéaire. Le second exemple en particulier donne une famille infinie de variétés Fano K-instables, en toute dimension plus grande que 5, sur lesquelles le flot de Kähler-Ricci développe des singularités de type 2.

En mai 2020, Yuji Odaka m'informait par email que le travail de Chi Li sur la conjecture de Yau-Tian-Donaldson pour les métriques cscK permettait de montrer que, pour les variétés sphériques, existence de métriques cscK et K-stabilité uniforme étaient équivalents. Il en faisait la preuve en quelques lignes à partir de l'article de Chi Li. Avec son accord, j'ai utilisé ce résultat pour démontrer une condition suffisante de K-stabilité uniforme des va-

riétés sphériques [Del23c]. C'était une idée qui me taraudait depuis quelques temps, j'avais d'ailleurs évoqué l'idée avec Bin Zhou lorsque Xiaohua Zhu m'avait invité à Pékin en 2018 pour un séjour de deux semaines. Avec le résultat de Chi Li, ce projet devenait bien plus pertinent, et je complétais les pièces qui manquaient pendant l'été 2020 (en profitant du peu de temps disponible que me laissaient Arsène et Basile, nés en mars 2020). En préliminaire, il fallait en particulier étendre la description des configurations test pour les variétés sphériques des configurations test spéciales traitées dans [Del20a] au cas général. Une application remarquable de la condition suffisante est que pour des polarisations de variétés sphériques proches de l'anticanonique, la K-stabilité pour les configurations test spéciales est suffisante (elle est aussi toujours nécessaire).

L'observation d'Odaka me permettait en parallèle de pousser plus loin un projet que je poursuivais depuis quelques années également : prouver des résultats analogues, dans le cas sphériques, à la caractérisation de l'existence de métriques cscK sur les surfaces toriques par Donaldson [Don02, Don09]. Pour le formuler de manière un peu imprécise, Donaldson montre non seulement que la conjecture de Yau-Tian-Donaldson pour les surfaces toriques était valide (sans l'adjectif uniforme), mais surtout qu'il suffit de considérer les configurations test dont la fibre centrale a au plus deux composantes. Il y a un autre résultat de nature similaire dans la littérature : la caractérisation par Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen-Friedman de l'existence de métriques cscK sur les fibrés *admissibles* en droites projectives. Finalement, je montre dans [Del23b] un résultat encore meilleur pour les variétés sphériques de rang un : il suffit de considérer les configurations test spéciales. J'ai passé du temps depuis, sans aboutir pour l'instant à un résultat satisfaisant, à étudier le cas des variétés sphériques de rang deux.

En 2021, j'invitais en utilisant les crédits d'un projet PEPS INSMI, Simon Jubert pour une semaine à Montpellier. Il était alors doctorant sous la co-direction de Vestislav Apostolov et Eveline Legendre, entre Montréal et Toulouse. Il me présentait en détails ses travaux sur la conjecture de Yau-Tian-Donaldson sur les fibrations principales semisimples toriques. Les similarités avec le cas des variétés sphériques (plus précisément horosphériques) étaient frappantes, et nous obtenions, essentiellement en parallèle, une condition suffisante combinatoire d'existence de métriques extrémales sur ces variétés. En rédigeant la preuve ensemble, nous avons surtout clarifié dans quelles circonstances ce critère devenait effectivement facile à appliquer, et nous l'avons illustré par des programmes informatiques très simples pour vérifier la condition [DJ23]. Une observation notable aussi est que, dans ce cas, il n'est pas nécessaire que la polarisation soit proche de l'anticanonique pour que la condition s'applique, il suffit que la polarisation *de la fibre* soit proche de l'anticanonique de la fibre, ce qui étend les situations d'application.

En 2022-2023, j'ai profité d'une demi-délégation CNRS pour effectuer, en collaboration avec Pierre-Louis Montagard, un travail chronophage mais que j'estime très utile, de classification des variétés sphériques (Fano) de petite dimension et de petit rang [DM23]. J'ai toujours été surpris qu'il n'y ait pas ou très peu d'approche des variétés sphériques par dimension, si ce n'est un chapitre, dans la thèse d'Hofscheier en 2015, sur les variétés sphériques Fano de dimension 3. Pour y remédier, nous sommes revenus aux sources de la définition des variétés sphériques, et nous avons utilisé très peu d'outils récents sur les variétés sphériques : nous aurions pu effectuer cette classification en 2006. Un des buts sous-jacents est de l'appliquer pour trouver de nouveaux exemples intéressants, en rapport avec l'existence de métriques canoniques. Pour l'instant, nous nous sommes contenté de déterminer quelles variétés parmi celles classifiées sont Kähler-Einstein, en utilisant [Del20a].

Enfin, je suis revenu aussi en 2023 sur des thèmes liés à mon postdoc avec Olivier Biquard, en étudiant des limites de métriques Kähler-Einstein coniques sur les variétés ho-

rosymétriques de rang un [Del23a]. C'est d'ailleurs Olivier Biquard qui m'avait présenté le problème, en lien avec son travail (avec Henri Guenancia) sur l'apparition des métriques de Tian-Yau (asymptotiquement cylindriques) comme limites de métriques Kähler-Einstein coniques [BG22]. Mon résultat est un cas particulier d'un résultat général espéré sur les métriques de Tian-Yau asymptotiquement coniques (pour lequel Henri Guenancia et Olivier Biquard ont une approche par recollements), mais contient aussi des cas différents, et pourrait éclairer notre construction dans [BD19].

Je présenterai également très brièvement les travaux en cours de Tran Trung Nghiem, que je co-encadre actuellement en thèse avec Marc Herzlich. Il travaille sur une nouvelle construction des métriques Calabi-Yau sur les espaces symétriques de rang deux, qui devrait finir le travail amorcé dans [BD19]. Il a déjà écrit deux articles préparatoires sur ce thème [Ngh23a, Ngh23b].

Géométrie algébrique des variétés sphériques

2.1 Introduction aux variétés sphériques

Dans cette première section, nous rappelons quelques définitions, et outils fondamentaux pour l'étude des variétés sphériques. La meilleure référence en français sur le sujet sont les *Notes de la session de la S. M. F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques"* sur les variétés sphériques par Michel Brion, disponibles librement sur sa page web.

2.1.1 Groupes réductifs

Soit G un groupe réductif linéaire complexe, connexe. Soit B un sous-groupe de Borel de G , et T un tore maximal de B . On note $X^*(T) = X^*(B)$ le groupe (abélien libre) des caractères de T ou B . Le rang de G est égal au rang de ce \mathbb{Z} -module.

Le groupe G agit sur son algèbre de Lie \mathfrak{g} par l'action adjointe Ad . La représentation de T induite se décompose de la manière suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\Phi \subset X^*(T)$ est le système de racines de (G, T) , et

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T, \text{Ad}(t)(x) = \alpha(t)x\}.$$

Le sous-groupe de Borel B correspond à un choix de racines positive Φ^+ de Φ , tel que

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

et, de manière équivalente, un choix de racines simples $S \subset \Phi^+$.

Exemple 2.1.1. Dans le cas où $G = \text{GL}_n$, on choisit traditionnellement pour B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, et pour T le sous-groupe des matrices diagonales, qu'on note sous la forme $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Le \mathbb{Z} -module $X^*(T)$ est engendré par les fonctions $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_j$ pour $1 \leq j \leq n$. Le système des racines Φ est l'ensemble des $\alpha_{j,k} : \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_j/a_k$ pour $j \neq k$, $\alpha_{j,k} \in \Phi^+$ si et seulement si $j < k$, et les racines simples sont les $\alpha_{j,j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$.

Le *groupe de Weyl* W de (G, T) est le groupe $N_G(T)/T$, il agit naturellement sur $X^*(T)$. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire W -invariant (qui étend la forme de Killing sur la partie semisimple). Soit V une représentation de G de dimension finie, alors V est isomorphe à un produit direct de représentations irréductibles de G . Dans toute représentation irréductible de G , il existe une unique droite B -stable, sur laquelle B agit via un poids $\lambda \in X^*(B)$. De plus, ce poids vérifie $\langle \alpha, \lambda \rangle \geq 0$ pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$, on dit que λ est un *poids dominant*, et que la représentation irréductible est *de plus haut poids* λ . Réciproquement, pour tout poids dominant λ il existe des représentations irréductibles de plus haut poids λ . Pour chaque λ , on fixe une telle représentation V_λ . On appelle

$$C^+ := \{p \in X^*(B) \otimes \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in \Phi^+, \langle \alpha, p \rangle \geq 0\}$$

la *chambre de Weyl positive*. En résumé, toute représentation de dimension finie de G est de la forme

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(V)} V_\lambda^{m_\lambda} \quad (2.1)$$

où $\Lambda(V) \subset C^+ \cap X^*(B)$ est un sous-ensemble fini, et $m_\lambda \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

2.1.2 Variétés sphériques

Soit X une variété algébrique complexe normale, munie d'une action régulière d'un groupe algébrique linéaire réductif complexe, connexe G . Soit B un sous-groupe de Borel de G .

Définition 2.1.2. La *complexité* $c = c(X, G)$ de la G -variété X est la codimension minimale d'une orbite de B dans X . Le *réseau des poids* $M = M(X, G)$ de la G -variété X est le sous-groupe de $X^*(B)$ formé par les poids de l'action de B sur l'espace $\mathbb{C}(X)$ des fonctions rationnelles sur X . Autrement dit, $\chi \in M$ si et seulement s'il existe une fonction rationnelle f sur X telle que, pour tout $b \in B$, tout $x \in X$, $f(b^{-1}x) = \chi(b)f(x)$. Le *rang* $r = r(X, G)$ de la G -variété X est le rang de M comme \mathbb{Z} -module.

Définition 2.1.3. Une *variété sphérique* est une G -variété normale X de complexité 0. Autrement dit, X est sphérique si un sous-groupe de Borel de G opère dans X avec une orbite ouverte dense.

Exemple 2.1.4. — Si $G = T$, alors $B = T$, et comme tout quotient d'un tore est aussi un tore, X est une variété torique sous l'action d'un quotient de T .

- Par la décomposition de Bruhat, toute variété projective homogène est sphérique.
- Par la décomposition de Bruhat encore, si G_0 est un groupe réductif connexe, et $G = G_0 \times G_0$, alors G_0 muni de l'action de $G_0 \times G_0$ par multiplication à droite et à gauche est une variété sphérique. Par conséquent, si une G -variété normale X contient un ouvert dense isomorphe de manière G -équivariante à G_0 , alors X est sphérique.

Plus généralement, on note qu'une variété sphérique X admet aussi une orbite ouverte dense de G , et que X est sphérique si et seulement si cette orbite l'est. On appelle cette orbite un *espace homogène sphérique*, et si H est le stabilisateur d'un point, on dit que H est un *sous-groupe sphérique* de G .

2.1.3 Cône des valuations et couleurs

Soit X une variété algébrique complexe. Une *valuation sur X* est une valuation sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X)$, c'est-à-dire un morphisme de groupe $\nu : \mathbb{C}(X)^* \rightarrow \mathbb{R}$ (pour l'addition sur \mathbb{R}) telle que $\nu(\mathbb{C}^*) = \{0\}$ et $\nu(f_1 + f_2) \geq \min(\nu(f_1), \nu(f_2))$ si f_1, f_2 et $f_1 + f_2 \in \mathbb{C}(X)^*$.

On suppose maintenant à nouveau que X est une G -variété sphérique. Comme B a une orbite ouverte dense, une fonction rationnelle B -équivariante sur X est déterminée, à constante multiplicative près, par son poids. Soit $N = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ le \mathbb{Z} -module dual au réseau des poids M . La restriction d'une valuation ν aux fonctions B -équivariantes définit un élément $\nu|_M \in N \otimes \mathbb{R}$. Si \mathcal{E} est un ensemble de valuations, on notera parfois par $\mathcal{E}|_M$ l'image de \mathcal{E} par l'application $\cdot|_M : \nu \mapsto \nu|_M$.

Définition 2.1.5. Le *cône des valuations* \mathcal{V} de X est l'ensemble des $\nu|_M$, lorsque ν parcourt les valuations G -invariantes sur X .

C'est, comme son nom l'indique, un cône polyédral rationnel dans $N \otimes \mathbb{R}$. De plus, l'application qui à ν associe $\nu|_M$ est injective sur les valuations G -invariantes. En fait, le cône \mathcal{V} est cosimplicial.

Définition 2.1.6. Les éléments de l'ensemble minimal (fini) Σ des éléments primitifs de M tels que $\mathcal{V} = \{x \in N \otimes \mathbb{R} \mid \forall \sigma \in \Sigma, \sigma(x) \leq 0\}$ sont appelés les *racines sphériques*.

Notons que \mathcal{V} est un invariant à transformation G -équivariante birationnelle près de X , car il ne dépend que de l'action de G sur le corps des fractions rationnelles. En particulier, il ne dépend que de l'orbite ouverte G/H de G dans X . Étant donné un modèle G -birationnel X de G/H , les diviseurs premiers sur X donnent lieu à des valuations (divisorielles) sur X . En fait, ces valuations, pour tous les modèles X , engendrent le cône \mathcal{V} .

Un cas particulier est remarquable : lorsque le cône des valuations est $N \otimes \mathbb{R}$ tout entier. Introduisons la terminologie correspondante.

Définition 2.1.7. La variété X est *horosphérique* lorsque $\mathcal{V} = N \otimes \mathbb{R}$.

D'autres diviseurs jouent un rôle fondamental dans la géométrie des variétés sphériques : les *couleurs*. Les couleurs sont fréquemment interprétées de différentes manières, mais la correspondance est simple. On peut définir une couleur comme une orbite de B de codimension 1 dans l'orbite ouverte G/H . On note \mathcal{C} l'ensemble des couleurs, qui est un ensemble fini. Chaque couleur induit un diviseur premier sur X (son adhérence), et donc une valuation divisoriale sur X , mais l'application qui à une couleur associe son image dans $N \otimes \mathbb{R}$ n'est pas nécessairement injective.

À une couleur $C \in \mathcal{C}$, on associe aussi un sous-groupe parabolique standard $\zeta(C)$, le stabilisateur dans G de la couleur. L'intersection de tous les $\zeta(C)$ est le stabilisateur de l'orbite ouverte de B , on l'appelle le *sous-groupe parabolique adapté*.

Définition 2.1.8. La *donnée combinatoire* associée à G/H est (M, Σ, \mathcal{C}) où $M \subset X^*(B)$ est le réseau des poids, $\Sigma \subset M$ est l'ensemble des racines sphériques, et \mathcal{C} est l'ensemble des couleurs, vu comme un ensemble abstrait muni de deux applications $\cdot|_M : \mathcal{C} \rightarrow N = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ et ζ à valeur dans les sous-groupes paraboliques standards de G .

Proposition 2.1.9. [Los09] La donnée combinatoire (M, Σ, \mathcal{C}) détermine uniquement le sous-groupe sphérique H à conjugaison près.

2.1.4 Classification des plongements

On fixe un sous-groupe sphérique H de G , et les données combinatoires associées (M, Σ, \mathcal{C}) .

Définition 2.1.10. Une G -variété normale X , avec un point marqué $x \in X$, est un *plongement équivariant* de G/H si l'orbite de x est un ouvert (dense) de X , et son stabilisateur est égal à H .

Toute variété sphérique X est un plongement équivariant d'un espace homogène sphérique G/H . Ces plongements sont classifiés par des données combinatoires, qui généralisent les éventails toriques.

Définition 2.1.11. Un *cône colorié* est une paire (A, R) où R est une partie de \mathcal{C} (un ensemble de couleurs) avec $0 \notin R|_M$, et $A \subset N \otimes \mathbb{R}$ est un cône strictement convexe engendré par $R|_M$ et un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V} \cap N$, dont l'intérieur relatif a une intersection non-vide avec \mathcal{V} .

Si (A_1, R_1) et (A_2, R_2) sont deux cônes coloriés, on dit que (A_2, R_2) est une *face* de (A_1, R_1) si A_2 est une face de A_1 et $R_2 = \{D \in R_1 \mid D|_M \in A_2\}$.

Un *éventail colorié* est un ensemble fini non-vide \mathcal{F} de cônes coloriés tel que, si (A_2, R_2) est une face de $(A_1, R_1) \in \mathcal{F}$, alors $(A_2, R_2) \in \mathcal{F}$, et tout élément de \mathcal{V} est dans l'intérieur relatif d'au plus un cône colorié dans \mathcal{F} .

Théorème 2.1.12. [Kno91, Theorem 3.3] *L'ensemble des éventails coloriés est en bijection avec les classes de G -isomorphismes de plongements équivariants de G/H . Étant donné un plongement équivariant X d'éventail colorié \mathcal{F} , il y a une bijection entre orbites de G dans X et cônes coloriés dans \mathcal{F} . De plus, une orbite est dans l'adhérence d'une autre si et seulement si le cône colorié de la première est une face du cône colorié de la seconde.*

Comme pour les variétés toriques, on peut lire beaucoup de propriétés de X directement sur son éventail colorié. Par exemple :

Proposition 2.1.13. [Kno91, Theorem 4.2] *Un plongement équivariant X est complet si et seulement si le support $|\mathcal{F}| := \bigcup \{A \mid (A, R) \in \mathcal{F}\} \subset N \otimes \mathbb{R}$ de son éventail colorié \mathcal{F} contient tout le cône des valuations \mathcal{V} .*

Cependant, d'autres propriétés sont moins immédiates, par exemple, si un éventail est constitué seulement d'un cône colorié et de ses faces, alors les plongements équivariants associés ne sont pas, en général, affines. Il y a un cas extrême : si le cône des valuations est lui-même strictement convexe. Dans ce cas, on peut construire un plongement équivariant complet facilement : il suffit de considérer l'éventail formé par le cône des valuations et ses faces, avec toujours $R = \emptyset$. Lorsque le plongement correspondant est lisse, ce plongement est appelé la *compactification magnifique* de G/H (d'après la terminologie introduite par De Concini et Procesi [DP83]).

De même, pour les singularités, la caractérisation est plus complexe que pour les variétés toriques. Ainsi, si on peut obtenir un critère combinatoire de lissité des variétés sphériques, celui-ci passe essentiellement par une classification des modèles locaux possibles. La notion directement analogue, pour les éventails coloriés, à la notion d'éventail lisse, caractérise seulement les plongements localement factoriels.

Proposition 2.1.14. *Un plongement équivariant X est localement factoriel si et seulement si pour chaque cône colorié (A, R) , on peut écrire $R = \{r_1, \dots, r_k\}$, et*

$$A = \text{cone}(a_1, \dots, a_l, r_1|_M, \dots, r_k|_M)$$

de sorte que la famille $(a_1, \dots, a_l, r_1|_M, \dots, r_k|_M)$ se complète en une base du réseau N .

Sans donner la caractérisation de la lissité, on peut en donner un cas particulier assez général, qui reflète un comportement analogue aux variétés toriques.

Définition 2.1.15. Le plongement équivariant X d'éventail colorié \mathcal{F} est *toroidal* si pour tout cône colorié (A, R) de \mathcal{F} , on a $R = \emptyset$.

Proposition 2.1.16. Si un plongement équivariant est toroidal et localement factoriel, alors il est lisse.

Par exemple, si le cône des valuations est engendré par une base de N , alors il existe une compactification magnifique, comme décrite plus haut.

2.1.5 Polytopes moments des variétés sphériques

Soit X une G -variété normale, et L un fibré en droite ample sur X . On suppose de plus que l'action de G se relève à L , de sorte que les bijections induites entre les fibres soient des isomorphismes linéaires (on dit que L est linéarisé). Alors l'espace $H^0(X, L)$ des sections holomorphes globales de L est une représentation de G de dimension finie. Avec les notations de (2.1), on peut écrire

$$H^0(X, L) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(H^0(X, L))} V_\lambda^{m_\lambda}$$

pour des entiers non nuls m_λ . De même pour les puissances tensorielles $L^k = L \otimes \cdots \otimes L$.

Définition 2.1.17. Le polytope moment de (X, L) est l'ensemble

$$\Delta^+ = \Delta^+(X, L) = \text{conv} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} \Lambda(H^0(X, L^k)) \right)$$

Une propriété fondamentale de cet ensemble est, comme son nom l'indique, qu'il s'agit d'un polytope convexe dans $X^*(T) \otimes \mathbb{R}$. Nous allons voir, dans le cas des variétés sphériques une description explicite de ce polytope comme intersection de demi-espaces.

Notons que, quitte à passer à une puissance tensorielle, tout fibré en droite admet une linéarisation. De plus, deux linéarisations d'un même fibré diffèrent par un caractère de G . Par conséquent, les polytopes moments associés à deux linéarisations différentes sont images l'un de l'autre par une translation par un élément χ de $X^*(B)$ qui vérifie $\langle \alpha, \chi \rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$.

Si X est Gorenstein Fano et $L = K_X^{-1}$, alors il y a une linéarisation canonique de L , donc un polytope moment canonique. À chaque fois qu'on parlera de variétés Gorenstein Fano, on utilisera la linéarisation canonique.

Pour une G -variété générale, le polytope moment contient en général peu d'information. Comme il ne contient pas d'information a priori sur les multiplicités λ , on ne peut pas vraiment espérer retrouver les représentations $H^0(X, L^k)$ à partir du polytope moment seul. Dans le cas des variétés sphériques, la situation est différente : comme B a une orbite ouverte, toute section B -équivariante est uniquement déterminée, à constante multiplicative près, par son poids. Donc les multiplicités m_λ sont toutes égales à 1.

Brion a donné une description combinatoire des polytopes moments [Bri89] (et du groupe de Picard), comme suit. Soit L un fibré G -linéarisé sur X , et s une section méromorphe B -équivariante de L , de poids $\chi \in X^*(B)$. Comme S est B -équivariante, le diviseur de s est B -invariant. Or les diviseurs premiers B -stables sont en nombre fini : il s'agit des adhérences

des couleurs, et des diviseurs premier G -stables, correspondant aux rayons sans couleurs dans l'éventail de X . On peut ainsi écrire

$$\operatorname{div}(s) = \sum_{D \text{ premier } B\text{-stable}} n_D D$$

Si L est ample, le polytope moment de (X, L) est alors le polytope

$$\Delta^+ = \chi + \Delta$$

où

$$\Delta = \Delta(X, L, s) = \{p \in M \otimes \mathbb{R} \mid \forall D, D|_M(p) + n_D \geq 0\}$$

Les polytopes ci-dessus ont en fait du sens que L soit ample ou pas.

De plus, Brion montre que la structure de représentation de l'espace des sections est donnée par

$$\Lambda(H^0(X, L)) = \chi + \Delta \cap M$$

Cette description permet, via la formule de la dimension de Weyl, d'exprimer le degré d'un fibré en droite ample L en fonction de son polytope. On se servira d'un raffinement de cette formule, donc on la rappelle dès maintenant. On appelle polynôme de Duistermaat-Heckman de L (relatif au choix de la section s ici), le polynôme

$$P(p) = P_{L,s}(p) := \prod_{\alpha \in \Phi_X^+} \frac{\langle \alpha, p + \chi \rangle}{\langle \alpha, \frac{1}{2}\kappa_B \rangle} \quad (2.2)$$

où Φ_X^+ désigne l'ensemble des racines positives qui ne s'annulent pas identiquement sur Δ^+ (c'est indépendant du fibré ample considéré) et $\kappa_B = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Alors

$$\deg(L) = n! \int_{\Delta} P d\mu$$

où $d\mu$ est la mesure de Lebesgue sur $M \otimes \mathbb{R}$ normalisée par le réseau M , et n est la dimension de X .

Dans le cas de l'anticanonique, disons si X est Gorenstein, l'anticanonique admet une section B -équivariante s_{ac} de poids κ_X , la somme de toutes les racines dans Φ_X^+ (c'est aussi la somme des racines du parabolique adapté). De plus, le diviseur de s_{ac} s'écrit

$$D_{ac} = \operatorname{div}(s_{ac}) = \sum_{D \text{ premier } B\text{-stable}} m_D D$$

avec $m_D = 1$ si D est G -invariant, ou si $D \in \mathcal{C}$, et $\zeta(D) \cap (\Sigma \cup \frac{1}{2}\Sigma) \neq \emptyset$. Sinon, $D \in \mathcal{C}$ et on a $m_D := \langle \alpha^\vee, \kappa_X \rangle \geq 2$ où α est une racine simple telle que $-\alpha$ n'est pas une racine de $\zeta(D)$ [Bri97]. On note Δ_{ac}^+ le polytope moment pour la linéarisation canonique de l'anticanonique, et Δ_{ac} le polytope $-\kappa_X + \Delta_{ac}^+$.

De plus, si X est localement factorielle, le groupe de Picard de X est engendré par les diviseurs premiers B -stables, avec pour seules relations données par

$$\sum_{D \text{ premier } B\text{-stable}} D|_M(p) D = 0$$

pour $p \in M$.

2.2 Classification des variétés sphériques Fano

Je présente maintenant mon travail en collaboration avec Pierre-Louis Montagard [DM23], qui porte sur la classification des actions sphériques fidèles d'un groupe réductif G sur une variété localement factorielle Fano X , en imposant $\dim(X) \leq 4$ et $r(X, G) \leq 2$. Ce travail est motivé à la fois par le problème de classification des variétés Fano (en petite dimension), par la recherche d'exemples remarquables de variétés sphériques, qui pourraient exhiber des comportements intéressants relatifs à la K-stabilité et l'existence de métriques canoniques, ou d'autres problèmes de géométrie complexe.

La classification des variétés Fano (lisses) de dimension trois a été une réussite et un apport majeur en géométrie algébrique complexe. Elle a été obtenue par Iskovskikh, Mori et Mukai [Isk77, Isk78, MM82, MM03] : il y a 105 familles de déformations de variétés Fano de dimension trois. Cheltsov, Przyjalkowski et Shramov ont déterminé lesquelles on un groupe d'automorphisme infini [PCS19]. Parmi celles-ci, 29 sont des plongements d'espaces homogènes sphériques, mais elles ont souvent plus d'une action de groupe possible qui les rend sphériques. Ces différentes actions sont toutes potentiellement intéressantes, par exemple pour considérer des paires (X, D) avec X Fano et D un diviseur G -invariant de X , pour un groupe G agissant sur X .

En dimension quatre et plus, il n'y a pas de classification complète des variétés Fano en général, même si ça fait l'objet d'un programme de recherche actif au Royaume-Uni lié à la symétrie miroir. Par contre, les variétés toriques Fano de dimension quatre ont été classifiées par Batyrev [Bat99] et Sato [Sat00]. Elles ont aussi été classifiées en dimensions supérieures (jusqu'à 8) à l'aide de programmes informatiques par Øbro [Øb07]. Avec Pierre-Louis Montagard, nous avons souhaité commencer l'exploration du cas sphérique. Il s'avère que le cas des variétés sphériques de dimension 4 et de rang 1 ou 2 peut se faire à la main. Le cas du rang 3 nécessite vraisemblablement l'aide d'un ordinateur, et Girtrude Hamm, étudiante de Johannes Hofscheier et Alexander Kasprzyk travaille actuellement sur ce projet.

2.2.1 Classification des espaces homogènes

Nous avons d'abord obtenu la classification complète des espaces homogènes sphériques G/H de dimension ≤ 4 , où l'action de G est supposée fidèle, et l'image de G dans les automorphismes de G/H est supposée contenir le groupe $\text{Aut}^G(G/H)$ des automorphismes G -équivariants de G/H . Ces deux dernières hypothèses ne sont là que pour éviter des redondances inutiles.

La liste des espaces homogènes sphériques de dimension 4 est longue, avec 45 familles, dont 14 familles infinies. Pour donner une idée, on donne les détails seulement pour un groupe réductif. Au lieu de donner pour chaque cas le groupe qui agit fidèlement, on se contente de donner le groupe sous la forme $G = G^{sc} \times G_m^n$ où G_m^n agit fidèlement et G^{sc} est semisimple, simplement connexe et agit avec un noyau fini.

Théorème 2.2.1. *Un espace homogène G/H qui satisfait les hypothèses ci-dessus est homogène sous l'action d'un groupe $G = G^{sc} \times G_m^n$ avec G^{sc} de rang inférieur ou égal à 4 parmi les groupes SL_2^k , SL_3^k , $\text{Sp}_4 \times \text{SL}_2^k$, $\text{SL}_3 \times \text{SL}_2^k$, $\text{SL}_4 \times \text{SL}_2^k$, SL_5 . Si $G = \text{SL}_2 \times G_m^n$, alors H est l'un des sous-groupes suivants :*

1. $n = 0$ et H est B^- , $B_1^- \times T_2$, $B_1^- \times N(T_2)$, $\text{diag}(\text{SL}_2)$, $N(\text{diag}(\text{SL}_2))$, $\text{diag}(B_1)$, $N(\text{diag}(B_1))$, $T_1 \times T_2$, $N(T_1) \times T_2$, $\text{diag} N(T_1)$, ou $N(T_1) \times N(T_2)$
2. $n = 1$ et H est $\text{diag}(\text{SL}_2) \times \{1\}$, $\langle \text{diag}(\text{SL}_2), (I_2, -I_2, -1) \rangle$, $N(\text{diag}(\text{SL}_2)) \times \{1\}$, ou dans les familles infinies

- (a) $\ker((a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \chi_1)|_{B^-})$ pour $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ avec $a_1 \geq |a_2|$.
- (b) $\ker((a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \chi_1)|_{T_1 \times B_2^- \times G_m})$ avec $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $a_2 \in \mathbb{Z}$
- (c) $\left\langle T_1 \times \ker((a_2\omega_2 + \chi_1)|_{B_2^- \times G_m}), \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix}, \varepsilon \right) \right\rangle$ où $a_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\varepsilon = \pm 1$, ξ est une racine primitive 2^l -ième de l'unité, et soit 2^l divise a_2 si $\varepsilon = -1$, ou $\varepsilon = 1$, 2^l divise $2a_2$ et 2^l ne divise pas a_2 sauf si $l = 0$
3. $n = 2$ et $H = \ker((a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \chi_1)|_{B^-}) \cap \ker((b_2\omega_2 + \chi_2)|_{B^-})$ où soit $a_2 = b_2 = 0$ et $0 \leq a_1$, soit $0 < a_1 \leq a_2 \wedge b_2$, et $0 \leq a_2 < b_2$.

Expliquons un peu d'où cette classification provient, et comment l'énumération des groupes possibles peut largement être raffinée grâce au rang pour vérifier que les groupes de haut rang contribuent peu de familles d'espaces homogènes sphériques. Le point clef pour obtenir une classification est le résultat de structure locale des variétés sphériques prouvé par Brion, Luna et Vust, et qui appliqué au cas particulier d'un espace homogène sphérique s'énonce comme suit.

Proposition 2.2.2. [BLV86] *On suppose que G/H est un espace homogène sphérique, et que l'orbite BH/H de B est un ouvert dense. Soit P le stabilisateur de cette orbite. Alors il existe un sous-groupe de Levi L de P , de centre connexe C , tel que $P \cap H = L \cap H$ contient le sous-groupe dérivé $[L, L]$ et l'application*

$$P^u \times C / (C \cap H) \rightarrow BH/H, \quad (p, x) \mapsto p \cdot x$$

est un isomorphisme.

Ce résultat a deux conséquences simples : en prenant les dimensions dans l'isomorphisme, on a

$$\dim(G/P) + r(G/H, G) = \dim(P^u) + \dim(C / (C \cap H)) = \dim(G/H)$$

et de plus, un facteur semisimple de P agit trivialement sur G/H . Étant donné nos hypothèses, on en déduit que P ne contient pas de facteur semisimple de G , mais aussi que G/P est un espace homogène projectif sous G^{sc} , de dimension au plus 4, et que le rang de G/H dépend de cette dimension. D'après la classification (bien connue) des espaces homogènes projectifs, on en déduit que, si par exemple $\dim(G/H) = 4$, on a les possibilités suivantes :

- $r = 0$, $G/H = G/P$ est projectif
- $r = 1$, $G^{sc} \in \{\mathrm{SL}_3, \mathrm{Sp}_4, \mathrm{SL}_2^3, \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_2, \mathrm{SL}_4\}$
- $r = 2$, $G^{sc} \in \{\mathrm{SL}_3, \mathrm{SL}_2^2\}$
- $r = 3$, $G^{sc} = \mathrm{SL}_2$
- $r = 4$, $G = \mathbb{G}_m^4$.

Pour aller plus loin, un outil très utile est la construction suivante :

Définition 2.2.3. Étant donné un sous-groupe parabolique propre Q de G , un quotient réductif $\pi : Q \rightarrow G_0$ de Q , et un espace homogène G_0/H_0 , on dit que l'espace homogène

$$G/H = \frac{G \times (G_0/H_0)}{Q}$$

est obtenu par *induction parabolique*.

L'espace homogène G/H est sphérique si et seulement si G_0/H_0 l'est. De plus, cette propriété peut se lire sur l'algèbre de Lie seule : G/H est obtenu par induction parabolique s'il existe un sous-groupe parabolique Q de G tel que $\text{Lie}(Q^u) \subset \text{Lie}(H) \subset \text{Lie}(Q)$.

Les espaces homogènes sphériques de rang 1 ont été classifiés, à induction parabolique près, par Akhiezer [Akh83]. De la liste d'Akhiezer, on déduit facilement les espaces homogènes sphériques de dimension ≤ 4 et de rang 1. Pour classifier ceux de rang 2 et 3, il suffit donc de considérer les groupes $G = \text{SL}_2 \times \mathbb{G}_m^n$, $G = \text{SL}_2^2 \times \mathbb{G}_m^n$ et $G = \text{SL}_3 \times \mathbb{G}_m^n$.

Pour traiter ces cas là, nous utilisons la classification des sous-algèbres de Lie de \mathfrak{sl}_2^2 et \mathfrak{sl}_3 à conjugaison près obtenue par Douglas et Repka [DR16b, DR16a]. Avec les restrictions qu'on s'impose sur les dimensions, et en raisonnant selon les projections des sous-groupes H dans G^{sc} , on arrive assez rapidement à établir la liste des sous-groupes sphériques.

2.2.2 Polytopes Fano coloriés

Une fois les espaces homogènes sphériques déterminés, il nous reste à en déterminer les plongements localement factoriels Fano. Pour ceci, on utilise la théorie des plongements sphériques, et le préalable est de déterminer les données combinatoires des espaces homogènes sphériques considérés. Ces données se comportent très bien par induction parabolique, ce qui permet de les obtenir en ne traitant qu'un nombre restreint de cas. Pour ces cas restants, nous avons fourni un modèle explicite, pour déterminer explicitement les fonctions rationnelles B -équivariantes, les couleurs, etc. Ceci permet aussi d'identifier, dans chaque cas, plusieurs exemples explicites parmi les variétés classifiées de manière combinatoire.

Pour préciser les résultats et méthodes, rappelons la classification des plongements Gorenstein, Fano, localement factoriels d'un espace homogène sphérique, qui découle essentiellement des travaux de Brion [Bri97], et qui est énoncé sous la forme qu'on utilise par Gagliardi et Hofscheier.

Définition 2.2.4. Un polytope $\Omega \subset N \otimes \mathbb{Q}$ dont l'ensemble de sommets est $V(\Omega)$ est dit *localement factoriel G/H -reflexif* si :

1. $0 \in \text{Int}(\Omega)$,
2. $\forall C \in \mathcal{C}, \frac{C|_M}{m_C} \in \Omega$,
3. $V(\Omega) \subset \left((N \cap \mathcal{V}) \cup \left\{ \frac{C|_M}{m_C}, C \in \mathcal{C} \right\} \right)$,
4. pour toute facette F de Ω telle que $\text{cone}(F) \cap \text{Int}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, on note $\mathcal{C}_F = \{C \in \mathcal{C} \mid \frac{C|_M}{m_C} \in F\}$, alors
 - (a) $\cdot|_M : \mathcal{C}_F \rightarrow \text{cone}(F)$ est injective,
 - (b) $V(F) = \left\{ \frac{C|_M}{m_C} \mid C \in \mathcal{C}_F \right\} \cup \mathcal{I}_F$, et $\{C|_M \mid C \in \mathcal{C}_F\} \cup \mathcal{I}_F$ forme une base de N .

Proposition 2.2.5. [GH15a, Theorem 1.9] *L'ensemble des classes d'isomorphismes G -équivariants de plongements localement factoriels Fano de G/H est en bijection avec l'ensemble des polytopes localement factoriels G/H -reflexifs.*

Dans le cas du rang 1 ou du rang 2, on peut utiliser directement cette définition pour classifier à la main les plongements possibles. Le résultat suit.

Théorème 2.2.6. *Il y a 337 actions sphériques fidèles sur une variété localement factorielle Fano de dimension 4 ou moins, et rang 2 ou moins. On a listé leurs données combinatoires dans [DM23].*

Pour chaque rang et dimension, voici le nombre de plongements sphériques obtenu :

dim	1	2	3	4
rank = 0	1	2	6	9
rank = 1	1	5	13	57
rank = 2	0	5	44	194
rank ≤ 2	2	12	63	260

Parmi ces variétés, on sait, soit parce qu'elles sont toroidales, soit parce qu'elles ont une description explicite, qu'au moins 321 sont lisses. Notons tout de suite que ce nombre n'a pas vraiment de sens si on s'intéresse uniquement à la variété Fano sous-jacente et qu'on oublie l'action de groupe. En effet, il y a nécessairement de nombreuses répétitions dûes aux nombreuses actions sphériques qu'on peut mettre sur certaines variétés très symétriques. Il y a donc beaucoup moins que 337 variétés sous-jacentes.

Avec les données combinatoires calculées, on peut facilement déterminer des invariants des variétés sous-jacentes, telles que le degré anticanonique, le rang de Picard, etc. Ceci permet de montrer facilement qu'on obtient au moins 117 variétés Fano de dimension 4 sous-jacentes différentes, et au moins 42 différentes qui ne sont pas toriques sous une autre action. Parmi les variétés toriques qui apparaissent dans notre classification, les structures sphériques exhibées peuvent grandement en simplifier l'étude : le polytope moment d'une variété sphérique de rang r est de dimension r .

2.3 K-stabilité des variétés sphériques Fano

Passons maintenant à l'étude de la K-stabilité des variétés sphériques, en nous concentrant d'abord sur les variétés sphériques Fano. Il s'agit de mon premier travail post-thèse [Del20a], réalisé au cours de l'année 2015-2016. Motivé par le critère combinatoire d'existence de métriques Kähler-Einstein que j'avais obtenu pour les compactifications de groupes dans ma thèse, j'ai voulu étendre ce résultat à toutes les variétés sphériques. Ne pouvant adopter une approche purement analytique, je me suis tourné vers la K-stabilité, qui avait, à l'époque, très rarement été vérifiée directement. En fait, c'est plutôt la K-stabilité équivariante que je considérais, puisque celle-ci avait été montrée équivalente à l'existence de métriques Kähler-Einstein par Datar et Székelyhidi [DS16], raffinant le résultat de Chen, Donaldson et Sun.

2.3.1 K-stabilité

Pour donner des résultats précis dans la suite, introduisons la définition précise de la K-stabilité. Celle-ci repose sur deux notions, celles de configurations test qui sont certaines dégénérescences de variétés polarisées, et celle d'invariant de Donaldson-Futaki qui associe un nombre à une telle configuration test. Soit (X, L) une variété normale polarisée (c'est-à-dire que L est un fibré ample sur X , on pourrait plus généralement considérer un \mathbb{R} -fibré ample).

Définition 2.3.1. Une *configuration test* pour (X, L) est la donnée d'une variété normale \mathcal{X} , équipée d'une action de \mathbb{C}^* , d'un morphisme plat \mathbb{C}^* -équivariant $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$, et d'un fibré en droite \mathcal{L} \mathbb{C}^* -linéarisé, tels que \mathcal{L} est π -ample et la fibre $(X_1 := \pi^{-1}(1), L_1 := \mathcal{L}|_{X_1})$ est isomorphe à (X, L^r) pour un entier $r > 0$. La *fibre centrale* de la configuration test est $X_0 := \pi^{-1}(0)$, muni de la restriction L_0 du fibré \mathcal{L} . La configuration test est *spéciale* si X_0 est

une variété normale (en particulier, réduite et irréductible). La configuration test est *produit* si X_0 est isomorphe à X .

Pour une G -variété X , avec un fibré linéarisé L , on parle de configurations test G -équivariante lorsque \mathcal{X} est muni d'une action de G qui commute avec l'action de \mathbb{C}^* , π est G -invariante, \mathcal{L} est $G \times \mathbb{C}^*$ -linéarisé, et l'isomorphisme entre (X_1, L_1) et (X, L^r) est G -équivariant.

L'action de \mathbb{C}^* sur la fibre centrale donne lieu à des représentations de \mathbb{C}^* sur $H^0(X_0, L_0^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On note d_k la dimension de cette représentation, et w_k son poids total (autrement dit, $z \in \mathbb{C}^*$ agit sur $\Lambda^{d_k} H^0(X_0, L_0^k)$ par multiplication par z^{w_k}). Donaldson [Don02] montre le développement

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + \frac{F_1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

Définition 2.3.2. L'invariant de Donaldson-Futaki de la configuration test $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ est le nombre

$$\text{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := -F_1$$

La variété polarisée (X, L) est K -semistable si $\text{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq 0$ pour toute configuration test $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$. Elle est K -stable si, de plus, $\text{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$ seulement si la configuration test est produit.

On ajoute *par rapport aux configurations test spéciales* (G -équivariantes) dans la terminologie si on ne considère que les configurations test spéciales (G -équivariantes).

En fait, l'invariant de Donaldson-Futaki ne se comporte pas très bien sous l'opération de changement de base $z \mapsto z^d$ qui produit une nouvelle configuration test : on aimerait que, sous cette opération, l'invariant de Donaldson-Futaki soit multiplié par d , mais il est en général plus grand. Vu la définition de K -stabilité, on peut sans problème utiliser la variante qui a ce comportement par rapport aux changements de base. Elle s'appelle, étant donné le cadre dans lequel elle a été mise en valeur, *fonctionnelle de Mabuchi non-Archimédienne*, et on la note $M^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$. Pour calculer ce nombre pour toutes les configurations test, il suffit de le calculer sur les configurations test dont la fibre centrale est réduite, car on peut toujours s'y ramener par changement de base, et dans ce cas, les deux nombres coïncident.

2.3.2 Critère combinatoire et exemples

On travaille toujours avec G, B, H , etc, fixés comme à la section précédente. Rappelons que l'anticanonique a une linéarisation canonique, et une section méromorphe B -invariante canonique qui donne lieu au polytope Δ_{ac} et à son polynôme de Duistermaat-Heckman P_{ac} comme dans (2.2). On rappelle que Σ désigne l'ensemble des racines sphériques de l'orbite ouverte G/H de X .

Théorème 2.3.3. [Del20a] Une G -variété sphérique \mathbb{Q} -Gorenstein Fano est K -stable pour les configurations test G -équivariantes si et seulement si :

$$\int_{\Delta_{ac}} p P_{ac}(p) d\mu = \sum_{\sigma \in \Sigma} x_{\sigma} \sigma$$

avec $x_{\sigma} > 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.

La classe des variétés sphériques est beaucoup plus générale que celle des variétés toriques, et ça se reflète très bien sur les exemples de comportements observés en K -stabilité. En fait, les variétés toriques sont des cas particuliers de variétés horosphériques, et que dans ce cas il n'y a aucune racine sphérique, par conséquent, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.3.4. [Del20a] *Une variété horosphérique \mathbb{Q} -Gorenstein Fano est K -stable si et seulement si elle est K -semistable, si et seulement si son invariant de Futaki est identiquement nul.*

Bien sûr, le calcul explicite de l'invariant de Futaki des variétés horosphériques est essentiellement équivalent au calcul des conditions de K -stabilité des variétés sphériques générales, mais sans calculs, le corollaire précédent fournit une infinité de contre-exemples à une conjecture d'Odaka et Okada [OO13]. Ces derniers avaient, dans la lignée de la correspondance entre propriétés algébriques et métriques, conjecturés que les briques de base de la géométrie birationnelle des variétés Fano, les variétés Fano de rang de Picard égal à un, devait être aussi proche que possible d'admettre des métriques Kähler-Einstein. En terme de K -stabilité, elle devaient être K -semistables. Fujita a trouvé le premier des contre-exemples [Fuj17], puis j'ai appliqué le corollaire précédent pour en fournir une infinité.

Ces exemples sont parmi l'une des familles les plus remarquables de variétés horosphériques : les variétés horosphériques Fano lisses de rang de Picard un qui ne sont pas homogènes sous l'action d'un groupe plus grand. Elles ont été classifiées par Pasquier [Pas09], et ont donné des contre-exemples remarquables à diverses attentes naturelles, avant et après mon résultat : la rigidité des variétés homogènes projectives [PP10], et la semi-stabilité du fibré tangent d'une variété Fano de rang de Picard un [Kan21]. Ces variétés ont toujours un groupe d'automorphisme non-réductif, donc par l'obstruction de Matsushima, elles n'admettent pas de métriques Kähler-Einstein. Par mon résultat, elles ne sont donc pas K -semistables. Notons que ces variétés illustrent très bien la différence entre variétés horosphériques et variétés toriques : les seules variétés toriques lisses de rang de Picard un sont les espaces projectifs.

Pour les variétés sphériques en général, la K -semistabilité est bien différente de la K -stabilité, bien que je ne connaisse pas d'exemple de variété sphérique Fano lisse strictement K -semistable (il est par contre facile de produire des exemples de paires sphériques Fano K -semistables). On peut ainsi trouver des exemples de variétés Fano qui sont K -instables sans être K -semistables, tout en ayant un groupe d'automorphisme réductif et un invariant de Futaki nul. Les premiers tels exemples explicites de la littérature sont les compactifications de groupes sans métriques Kähler-Einstein que j'avais trouvé dans ma thèse. La possibilité de considérer les variétés sphériques permet d'obtenir de nombreux autres exemples, y compris des familles infinies.

Théorème 2.3.5. [Del22] *Soit Q^n la quadrique de dimension n , et Q^k une sous-quadrique linéaire de Q^n de dimension k . Si $2 \leq k \leq n - 3$, alors l'éclatement $\text{Bl}_{Q^k} Q^n$ de Q^n le long de Q^k est une variété Fano lisse qui est K -instable. Dans les autres cas, $\text{Bl}_{Q^k} Q^n$ est K -stable.*

Ce résultat provient de l'application du critère combinatoire de K -stabilité de [Del20a] à ces variétés, qui sont sphériques sous l'action de la composante neutre de leur groupe d'automorphisme. Cependant, pour traiter des familles infinies, à paramètres, comme ici, la condition combinatoire est loin d'être immédiate à vérifier. Nous arrivons à le faire par des techniques d'approximation élémentaires, et nos méthodes ont plus tard été utilisées pour d'autres familles (infinies ou non), démontrant que le critère est effectivement largement applicable en pratique (voir par exemple [LPY22, Fan21]). Notons aussi que ce type de calcul explicite de K -stabilité a beaucoup gagné en popularité depuis ces premiers travaux, avec le développement du critère valuatif de K -stabilité et notamment les travaux de Abban et Zhuang [AZ22] qui permettent de traduire la K -stabilité de variétés Fano en calcul de la même nature, y compris pour des variétés sans symétries, lorsque leur géométrie algébrique est assez bien comprise. Le livre [ACC+23] illustre bien les progrès que ça a rendu possible sur les variétés Fano de dimension trois.

2.3.3 Dégénérescences spéciales équivariantes

La preuve du critère combinatoire de K-stabilité repose sur deux étapes : d'une part, déterminer et comprendre les configurations test spéciales équivariantes pour une variétés sphériques \mathbb{Q} -Gorenstein Fano, d'autre part, calculer l'invariant de Donaldson-Futaki pour ces configurations test.

Théorème 2.3.6. *Soit X une G -variété sphérique \mathbb{Q} -Gorenstein Fano. Il y a une bijection entre configurations test G -équivariantes à fibre centrale irréductible $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ et éléments rationnels ξ dans le cône des valuations. Une configuration test spéciale est produit si et seulement si ξ est dans la partie linéaire du cône des valuation.*

En appliquant les résultats de Gagliardi et Hofscheier donnant les données combinatoires d'une orbite dans une variété sphérique [GH15b], on peut en dire beaucoup plus sur les fibres centrales possibles, comme c'est fait dans un cadre un peu différent par Batyrev et Moreau [BM20].

Corollaire 2.3.7. *La classe d'isomorphisme G -équivariant de la fibre centrale X_0 ne dépend que de la face du cône des valuations dans laquelle ξ se trouve. De plus, si $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont deux éléments rationnels du cône des valuation tels que $\xi^{(1)}$ est dans l'adhérence de la face à laquelle appartient $\xi^{(2)}$, alors la fibre centrale $X_0^{(1)}$ pour $\xi^{(1)}$ admet une configuration test spéciale dont la fibre centrale est $X_0^{(2)}$ (la fibre centrale pour $\xi^{(2)}$).*

On obtient ainsi une description très précise des configurations test spéciales équivariantes, et des relations entre elles. La fibre centrale X_{hs} correspondant à un élément de l'intérieur du cône des valuations est une variété horosphérique, et toutes les autres fibres centrales possibles admettent une configuration test spéciale de fibre centrale X_{hs} . C'est cette image (montrée dans [Del20a] sans montrer la description plus précise ci-dessus) que j'ai utilisée pour calculer l'invariant de Donaldson-Futaki. Plus précisément, j'ai utilisé cette propriété pour ramener le calcul de l'invariant de Donaldson-Futaki pour n'importe quelle configuration test à un calcul sur X_{hs} . Finalement, j'ai utilisé des techniques de géométrie différentielle comme décrites plus loin pour finir ce calcul.

Il faut noter que, depuis mes travaux, le formalisme valuatif pour la K-stabilité s'est développé, il rend possible un calcul plus rapide de la K-stabilité. Alexei Golota [Gol20] a par exemple revisité en partie mon résultat dans le cadre du critère valuatif, rendant la description des configurations test équivariantes moins nécessaire. Il utilise mon calcul initial pour les invariants de Donaldson-Futaki. Chenxi Yin m'a par contre aimablement envoyé (dans une communication personnelle) un calcul très direct de l'invariant delta qui ne repose pas sur mon calcul initial, et je ne doute pas que cette simplification rendra des généralisations à d'autres contextes plus facile. Cependant, la description des configurations test équivariantes a permis de nombreux résultats plus précis, dans le cadre de l'étude de dégénérescence naturelles, et a aussi permis de trouver de nouveaux ansatz pour construire des métriques de Calabi-Yau non-compacts.

2.4 K-stabilité des variétés sphériques polarisées

Donaldson avait, dans le même article [Don02] où il introduisait la notion moderne de K-stabilité, donné une traduction de la K-stabilité des variétés toriques polarisées en général en termes de fonctions convexes sur le polytope moment. Ce résultat avait été généralisé à certaines variétés sphériques par Alexeev et Katzarkov [AK05] ainsi que Nyberg [Nyb].

J'ai étendu cette traduction à toutes les variétés sphériques dans [Del23c], et j'ai montré comment récupérer le critère de [Del20a] de cette manière, mais aussi comment obtenir une condition suffisante de K-stabilité uniforme assez largement applicable. Plus intéressant encore, cette condition suffisante révèle que pour des variétés sphériques polarisées *proche* d'être Fano, la K-stabilité uniforme est équivalente à la K-stabilité par rapport aux configurations test spéciales. C'est une observation qui ouvre la porte à des généralisations, à d'autres variétés, des méthodes bien développées maintenant pour vérifier la K-stabilité des variétés Fano.

2.4.1 K-stabilité uniforme

L'objectif premier de la K-stabilité est de traduire de manière algèbro-géométrique l'existence de métriques canoniques. Après que Donaldson ait donné une définition précise dans [Don02] de la notion de K-stabilité conjecturalement équivalente à l'existence de métriques cscK, des exemples obtenues par Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen-Friedman ont suggéré que cette notion n'était pas suffisante. Ces exemples ont motivé l'introduction de la notion de K-stabilité uniforme par Székelyhidi [Szé15], notion qui a peu à peu évolué [Der16, BHJ17, His20].

En utilisant le travail révolutionnaire de Chen et Cheng sur l'existence de métriques à courbure scalaire constante via la propriété de la fonctionnelle de Mabuchi [CC21], Chi Li a montré qu'une notion de type K-stabilité uniforme implique l'existence de métriques cscK [Li22]. En général, cette notion est malheureusement différente de la K-stabilité uniforme, donc la conjecture de Yau-Tian-Donaldson reste ouverte, mais Chi Li a montré (aussi dans [Li22]) que, dans les cas des variétés toriques, sa notion coïncide avec la K-stabilité uniforme. Yuji Odaka a observé que sa preuve s'applique aussi aux variétés sphériques, ce qui a motivé mon travail [Del23c] (son observation est incluse dans l'appendice).

Théorème 2.4.1. [Li22] et [Del23c, Appendice par Odaka] *Si une G -variété sphérique polarisée (X, L) est G -uniformément K-stable, alors elle admet une métrique cscK.*

Rappelons la définition de K-stabilité uniforme. Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ une configuration test pour (X, L) variété polarisée. Alors les plurisections de la fibre centrale donnent une représentation de \mathbb{C}^* , qui se décompose en sous-représentation irréductible de dimension un. On note $\{\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{d_k,k}\}$ la collection des poids qui apparaissent (avec répétitions) dans $H^0(X_0, L_0^k)$. En particulier, on a $w_k = \sum_{i=1}^{d_k} \lambda_{i,k}$.

Définition 2.4.2. La fonctionnelle J non-Archimédienne appliquée à $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ est le nombre

$$J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \sup \left\{ \frac{\lambda_{i,k}}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq d_k \right\} - F_0$$

Notons que les deux composantes de la définition dépendent de la linéarisation de \mathcal{L} , mais pas leur différence.

Définition 2.4.3. La variété (X, L) est *uniformément K-stable* s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute configuration test $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$,

$$M^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \varepsilon J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$$

Cette définition ne peut pas être la bonne notion en présence d'automorphismes en général, car dans le cas d'une configuration test produit non-triviale, on a $M^{\text{NA}} = 0$ mais $J^{\text{NA}} \neq 0$. La bonne notion, en présence d'automorphismes, fait intervenir la notion de configuration test tordue.

Définition 2.4.4. Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ une configuration test G -équivariante pour une G -variété polarisée (X, L) . Soit $\mu \in X_*(Z(G)) \subset X_*(G)$ sous-groupe à un paramètre à valeurs dans le centre $Z(G)$ de G . La configuration test *tordue* par μ est la configuration test $(\mathcal{X}, \mathcal{L})_\mu$ avec le même espace total, même fibré en droite, même projection, mais avec une nouvelle action \cdot_μ de \mathbb{C}^* donnée en terme de l'action de $G \times \mathbb{C}^*$ par

$$z \cdot_\mu x = (\mu(z), z) \cdot x$$

On peut plus généralement définir des configurations test tordues par des éléments de $X_*(Z(G)) \otimes \mathbb{R}$ (ou au moins la valeur de la fonctionnelle M^{NA} sur ce qui y correspondrait).

Définition 2.4.5. Une G -variété (X, L) est G -uniformément K -stable s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute configuration test G -équivariante,

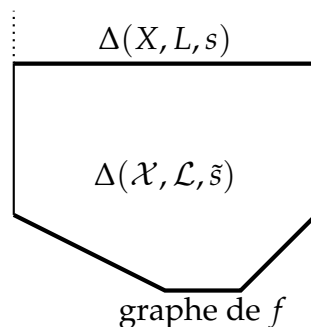
$$M^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \varepsilon \inf\{J^{\text{NA}}((\mathcal{X}, \mathcal{L})_\mu) \mid \mu \in X_*(Z(G)) \otimes \mathbb{R}\}$$

2.4.2 Traduction en termes de fonctions convexes

Soit (X, L) une G -variété sphérique polarisée, et s une section B -équivariante de L de poids $\chi \in X^*(B)$. On note toujours $\Delta = \Delta(X, L, s)$ le polytope associé.

Théorème 2.4.6. Une configuration test G -équivariante $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ pour (X, L) est encodée par une fonction f rationnelle linéaire par morceaux négative sur le polytope Δ , telle que l'image de l'intérieur de Δ par la (multi-application) sous-différentielle de f soit incluse dans l'opposé $-\mathcal{V}$ du cône des valuations. La configuration test est spéciale si elle correspond à une application linéaire $f \in -\mathcal{V} \cap N \otimes \mathbb{Q}$. Elle est produit si de plus $f \in \text{Lin}(\mathcal{V})$. En général, tordre la configuration test par un sous-groupe à un paramètre du centre de G correspond à ajouter une fonction linéaire $l \in \text{Lin}(\mathcal{V})$ à la fonction convexe.

Ce résultat repose sur la même méthode que celle utilisée par Donaldson pour les variétés toriques dans [Don02]. Il faut cependant trouver le bon cadre pour généraliser cette approche aux variétés sphériques, et traduire les conditions supplémentaires liées aux données combinatoires additionnelles. La première observation clé est que l'espace total d'une configuration test G -équivariante pour une G -variété sphérique polarisée (X, L) est une variété sphérique pour l'action de $G \times \mathbb{C}^*$. Ensuite, on considère une compactification de la configuration test au-dessus de $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en recollant avec la famille triviale, on étend \mathcal{L} de sorte que ce soit un fibré ample, on construit une section \tilde{s} , $B \times \mathbb{C}^*$ -équivariante, de \mathcal{L} à partir de la section donnée s de L pour comprendre le lien entre $\Delta(X, L, s)$ et $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \tilde{s})$. Grâce aux résultats de Brion, ce lien est le suivant : $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \tilde{s})$ est la portion de $(M \oplus \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ contenue entre $\Delta(X, L, s) \times \{0\}$ et le graphe de f sur $\Delta(X, L, s)$. On vérifie enfin que la classification combinatoire des plongements sphériques et de leurs fibrés amples permet de faire la construction dans l'autre sens.



Pour calculer les fonctionnelles non-Archimédiennes évaluées en $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ en termes de la fonction PL convexe f , on suit aussi la stratégie de Donaldson. Sous des bonnes hypothèses sur les configurations test, auxquelles on peut se ramener, on a

$$\sum_{j=1}^{d_k} \lambda_{j,k} = \dim H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^k) - \dim H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^k)$$

Toujours par les travaux de Brion [Bri89], on connaît la décomposition isotypique des espaces de sections d'une variété sphérique polarisée en termes du polytope associé

$$H^0(X, L^k) = \bigoplus_{\lambda \in M \cap k\Delta} V_{k\chi + \lambda}$$

Par la formule de la dimension de Weyl pour les représentations irréductibles, on peut écrire :

$$\dim V_{k\lambda} = k^d P(\lambda) + k^{d-1} Q(\lambda) + \dots$$

où P est le polynôme de Duistermaat-Heckman associé à (X, L, s) . En appliquant les techniques de Pukhlikov et Khovanskii [PK92], on obtient un développement asymptotique dont on connaît les deux premiers termes :

$$\dim H^0(X, L^k) = k^n \int_{\Delta} P d\mu + k^{n-1} \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Delta} P d\sigma + \int_{\Delta} Q d\mu \right) + o(k^{n-1})$$

où $d\sigma$ est la mesure sur le bord du polytope, qui restreinte à une facette, est la mesure de Lebesgue sur l'espace affine engendré par la facette, normalisée par l'intersection de M avec la direction de cet espace affine. En revenant aux définitions des fonctionnelles non-Archimédiennes, et en utilisant la description de $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \tilde{s})$ en fonction de $\Delta(X, L, s)$ et f , on obtient leurs expressions.

Plus précisément, notons comme d'habitude P le polynôme de Duistermaat-Heckman (voir (2.2), et introduisons

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \Phi_X^+} \frac{\langle \frac{1}{2}\kappa_B, \alpha \rangle}{\langle x + \chi, \alpha \rangle} P(x)$$

$$V = \int_{\Delta} P d\mu \quad a = \frac{1}{2V} \left(\int_{\partial\Delta} P d\sigma - \int_{\Delta} Q d\mu \right)$$

Théorème 2.4.7. [Del23c] Soit f la fonction convexe PL associée à $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, alors

$$M^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \frac{1}{2V} \left(\int_{\partial\Delta} f P d\sigma + \int_{\Delta} f 2(Q - aP) d\mu \right) =: \frac{1}{2V} \mathcal{L}(f)$$

et

$$J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \frac{1}{V} \int_{\Delta} (f - \min f) P d\mu =: \frac{1}{V} \mathcal{J}(f)$$

Enfinement, (X, L) est G -uniformément K -stable si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute fonction convexe PL à pentes dans $-\mathcal{V}$,

$$\mathcal{L}(f) \geq \varepsilon \inf_{l \in \text{Lin}(\mathcal{V})} \mathcal{J}(f + l)$$

2.4.3 Condition suffisante combinatoire

La traduction de la K-stabilité uniforme en termes de fonctions convexes sur le polytope ne permet pas, en général, de mieux la vérifier : l'espace des fonctions convexes rationnelles PL reste de dimension infinie. Pour obtenir une condition suffisante combinatoire vérifiable en pratique, je me suis inspiré de travaux analogues de Zhou et Zhu sur les variétés toriques [ZZ08]. L'idée fondamentale est de se débarrasser, dans l'expression de la fonctionnelle \mathcal{L} , du terme qui dépend de l'intégrale sur le bord. On cherche donc à appliquer une intégration par parties, et Zhou et Zhu ont trouvé une bonne manière de le faire.

On choisit un point dans l'intérieur de Δ , qu'on note 0 pour simplifier. On décompose Δ en une réunion de pyramides T_F de base une facette F de Δ , et de sommet le point 0. Soit $u_F \in N$ le vecteur normal sortant primitif à la facette F , et soient n_F les nombres tels que

$$\Delta = \{x \mid u_F(x) \leq n_F\}$$

On utilise toujours les notations des sections précédentes, et on note r le rang de la variété sphérique X , qui est égal à la dimension du polytope Δ .

Théorème 2.4.8. *On suppose que, pour toute facette F de Δ , et tout $x \in T_F$,*

$$d_x P(x) + (r + 1)P(x) + 2n_F(Q - aP)(x) \geq 0 \quad (2.3)$$

Alors (X, L) est G -uniformément K-stable si et seulement si (X, L) est K-stable par rapport aux configurations test G -équivariantes spéciales.

La K-stabilité par rapport aux configurations test G -équivariantes spéciales est exactement la notion utilisée pour laquelle on a donné un critère combinatoire dans [Del20a], dans le cas de la polarisation anticanonique. Pour un fibré général, cette condition reste tout aussi vérifiable en pratique. La condition (2.3) n'est pas immédiate à tester en général, y compris numériquement. Il y a cependant de nombreuses situations où elle reste simple à vérifier. Nous allons y revenir dans le cadre sphérique, ainsi que dans le cadre des fibrations principales semisimples pour lesquelles un résultat analogue marche aussi.

Grâce à l'observation d'Odaka, cette condition suffisante devient aussi une condition suffisante d'existence de métriques cscK.

Corollaire 2.4.9. *On suppose que, pour toute facette F de Δ , et tout $x \in T_F$,*

$$d_x P(x) + (r + 1)P(x) + 2n_F(Q - aP)(x) \geq 0 \quad (2.4)$$

Alors il existe une métrique cscK dans $c_1(L)$ si et seulement si (X, L) est K-stable par rapport aux configurations test G -équivariantes spéciales.

Le principe de la preuve est le suivant. Par approximation, on peut travailler sur les fonctions convexes lisses sur Δ (avec différentielles dans $-\mathcal{V}$), plutôt que les fonctions convexes PL. Il faut traiter, dans la K-stabilité G -uniforme, la difficulté venant des configurations test tordues. L'idée pour ça était déjà présente dans [Don02] pour le cas torique : on se ramène à des fonctions convexes normalisées au sens suivant. Une fonction convexe lisse f sur Δ est *normalisée* si $\inf f = 0$, et la différentielle $d_0 f$ de f en 0 est dans un complémentaire fixé \mathcal{W} de $\text{Lin}(\mathcal{V})$. On voit ici la spécificité des variétés sphériques avec le cône des valuations qui intervient à nouveau. On peut en tout cas toujours transformer une fonction convexe lisse en une fonction convexe lisse normalisée, en ajoutant une fonction affine dont la partie linéaire est un élément de $\text{Lin}(\mathcal{V})$. Sur les fonctions normalisées, la K-stabilité G -uniforme se traduit en

$$\mathcal{L}(f) \geq \varepsilon \int_{\Delta} f P d\mu$$

Pour rendre le terme $\mathcal{L}(f)$ facilement comparable à l'intégrale de fP sur Δ , on utilise la formule de la divergence, pour écrire, pour chaque facette F ,

$$\int_F fP d\sigma = \frac{1}{n_F} \int_{T_F} (P(x)d_x f(x) + r f(x)P(x) + f(x)d_x P(x)) d\mu(x)$$

On injectant cette formule dans $\mathcal{L}(f)$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \sum_F \frac{1}{n_F} \int_{T_F} (d_x f(x) - f(x))P(x) d\mu(x) \\ &\quad + \sum_F \frac{1}{n_F} \int_{T_F} ((r+1)P(x) + d_x P(x) - 2n_F(aP - Q)(x))f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Et le premier terme est positif par convexité et normalisation de f . On en déduit directement un critère de K-semistabilité équivariante, et pour la K-stabilité uniforme, il faut utiliser en plus un argument de compacité, qui fonctionne grâce à la combinatoire précise des variétés sphériques.

Exemple 2.4.10. On considère la $SL_2 \times \mathbb{C}^*$ -variété sphérique $X = \text{Bl}_{\mathbb{Q}^1} \mathbb{Q}^3$, dont on avait montré plus tôt qu'elle est Fano Kähler-Einstein. La condition suffisante combinatoire s'applique et on obtient facilement un voisinage *explicite* de l'anticanonique dans le cône des classes de Kähler de X dans lequel toute classe contient une métrique cscK.

2.4.4 Polarisation proche de l'anticanonique

La condition (2.3) est toujours satisfaite pour l'anticanonique. Ce n'est pas immédiat, et ça re-démontre, d'une certaine manière, pourquoi les configurations test spéciales sont suffisantes dans le cas Fano. Pour le cas général des variétés sphériques Fano, il faut bien choisir le point fixé dans l'intérieur de Δ , et utiliser la connaissance précise des différents types de facettes du polytope Δ , qui ne sont pas toutes associées à des diviseurs G -stables. Le cas torique Fano est plus simple, et on vérifie facilement que la condition est satisfaite.

En effet, dans le cas torique (pas nécessairement Fano), on a d'abord $P = 1$ et $Q = 0$, de sorte que la condition (2.3) devient

$$\forall F, \quad r + 1 - 2n_F a \geq 0$$

qui est déjà une condition simple : il suffit de vérifier qu'un nombre associé à chaque face est positif. Si on peut choisir $0 \in \text{Int}(\Delta)$ tel que tous les n_F soient égaux, alors on n'a plus qu'un seul nombre dont on doit s'assurer qu'il est positif. C'est le cas des variétés toriques Fano munies de l'anticanonique, pour lesquelles le polytope Δ est réflexif, et donc satisfait $\forall F, n_F = 1$ en prenant pour $0 \in \text{Int}(\Delta)$ l'origine dans $M \otimes \mathbb{R}$. De plus, le nombre $2a$ est égal à la courbure scalaire moyenne, qui dans le cas d'une variété Fano est égal à la dimension de la variété, ici r . Finalement la condition devient $1 = r + 1 - r \geq 0$, elle est effectivement satisfaite.

On remarque qu'elle est même strictement satisfaite. Comme la condition (2.3) varie continûment lorsque le polytope varie, on en déduit qu'elle est valide sur un voisinage de l'anticanonique, ceci indépendamment de la K-stabilité de la classe anticanonique.

Dans [Del23c], nous vérifions que cette observation s'étend à diverses classes de variétés sphériques. La preuve est plus délicate dans ce cadre : même si on a montré que la condition est vérifiée pour l'anticanonique, elle ne peut plus être aussi "strictement" vérifiée.

En effet, cette condition traduit la positivité (au sens large) de polynômes qui, nécessairement, s'annulent sur certaines facettes de Δ . De plus, le choix de point intérieur $0 \in \text{Int}(\Delta)$ n'a rien de simple. Cependant, je suis persuadé que le résultat reste vrai pour toutes les variétés sphériques, et qu'il faudrait mieux comprendre les conditions sous lesquelles la K-stabilité (G -)uniforme est équivalente à la K-stabilité par rapport aux configurations test (G -équivariantes) spéciales. Pour insister là-dessus, formulons une conjecture très imprécise.

Conjecture 2.4.11. *Soit (X, L) une variété proche d'être Fano, alors (X, L) est uniformément K-stable si et seulement si elle est K-stable par rapport aux configurations test spéciales.*

2.5 YTD en rang 1

Si la condition suffisante combinatoire exposée ci-dessus constitue un outil efficace pour trouver de nouvelles métriques cscK, ou pour formuler des conjectures sur la bonne notion de K-stabilité à considérer, elle ne donne pas de réponse définitive sur une variété donnée, car la condition (2.3) n'a aucune raison d'être nécessaire. Dans [Del23b], nous caractérisons de manière complète la bonne notion de K-stabilité pour la sous-classe des variétés sphériques de rang 1, tout en donnant un critère combinatoire très simple (un seul nombre à calculer par intégrale de polynômes en une variables) de K-stabilité.

Les variétés sphériques de rang 1 sont un atout remarquable de la théorie des variétés sphériques par rapport aux variétés toriques : la seule variété torique qui ait un polytope de dimension 1 est la droite projective \mathbb{P}^1 . Dans le cas des variétés sphériques, on a une infinité d'exemples, en toutes dimensions, et parmi ceux-ci une grande variété de comportements différents à étudier. On a déjà mentionné ces variétés de rang un dans le cadre de la classification des variétés sphériques de dimension 4, ainsi que par la liste des variétés horosphériques de nombre de Picard 1 obtenue par Pasquier. Pour ce qui est de la K-stabilité, et de l'existence de métriques canoniques, un certain nombre d'exemples de variétés sphériques de rang un avaient été considérés avant mes travaux, sans jamais être traités dans leur intégralité. On trouve notamment dans les travaux de Hwang [Hwa94] ou Chen et Guan [GC00] des preuves de l'existence de métriques extrémales sur ces variétés, lorsqu'elles sont toroidales et horosphériques. Le cas non-horosphérique a été étudié en partie par Guan (voir par exemple [Gua06]), mais il est difficile d'en tirer un énoncé précis. Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 2.5.1. *Soit (X, L) une G -variété sphérique polarisée de rang 1, non-horosphérique. Alors il existe une métrique cscK dans $c_1(L)$ si et seulement si l'invariant de Donaldson-Futaki de sa dégénérescence horosphérique est strictement positif.*

Ces variétés ont en général un groupe de Picard de rang largement supérieur à un, de sorte que nous prouvons, pour ces variétés, une version très forte de la conjecture de Yau-Tian-Donaldson. En particulier, la notion de K-stabilité suffisante pour obtenir l'existence de métriques cscK est la même que pour les variétés Fano : la K-stabilité par rapport aux configurations test G -équivariantes spéciales. De plus, nous exhibons des exemples avec des métriques cscK dans toutes les classes de Kähler, ainsi que des exemples avec des métriques cscK seulement dans certaines classes de Kähler. La condition de K-stabilité n'a donc rien d'évident et reste à vérifier, polarisation par polarisation.

Le principe de la preuve est assez simple, grâce à la formulation de la K-stabilité en terme de fonctions convexes. Dans le cas de rang 1 non-horosphérique, on peut identifier Δ à un segment $[s_-, s_+]$ dans \mathbb{R} , et le cône des valuations au demi-espace négatif dans \mathbb{R}^* .

Alors il s'agit de vérifier (sous l'hypothèse de K-stabilité par rapport à la dégénérescence horosphérique) que la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(f) = P(s_-)f(s_-) + P(s_+)f(s_+) - \int_{s_-}^{s_+} 2f(t)(aP(t) - Q(t)) dt$$

considérée pour les fonctions $f : [s_-, s_+] \rightarrow \mathbb{R}$ convexes lisses, croissantes avec $f(s_-) = 0$, vérifie

$$\mathcal{L}(f) \geq \varepsilon \int_{s_-}^{s_+} f(t)P(t) dt$$

pour un $\varepsilon > 0$ indépendant de f .

On raisonne par l'absurde. Par un résultat de compacité sur les fonctions convexes on peut trouver f_∞ convexe normalisée qui vérifie $\mathcal{L}(f_\infty) = 0$ et $\int fP = 1$. Par la normalisation, f_∞ est positive. Considérons le sous-ensemble sur lequel la fonction $aP - Q$ est positive. Il suit des définitions de P et Q que cet ensemble est convexe, donc de la forme $[t_-, t_+] \subset [s_-, s_+]$. Alors on peut décomposer $\mathcal{L}(f_\infty)$ en une composante positive

$$P(s_-)f_\infty(s_-) + P(s_+)f_\infty(s_+) - \int_{[s_-, t_-] \cup [t_+, s_+]} 2f_\infty(t)(aP(t) - Q(t)) dt$$

et une composante négative

$$- \int_{t_-}^{t_+} 2f_\infty(t)(aP(t) - Q(t)) dt$$

Alors la fonction affine ℓ qui vérifie $\ell(t_-) = f_\infty(t_-)$ et $\ell(t_+) = f_\infty(t_+)$, satisfait $\mathcal{L}(\ell) \leq 0$, mais elle est nécessairement non-triviale, et donne la contradiction avec l'hypothèse $\mathcal{L}(\text{Id}_\Delta) > 0$.

2.6 Cas des fibrations principales semisimples

Évoquons rapidement l'article [DJ23], qui ne traite pas directement des variétés sphériques. Les fibrations principales semisimples toriques ont été introduites par Apostolov, Calderbank, Gauduchon, Tønnesen-Friedman [ACGTF04], et généralisent en quelques sorte l'ansatz de Calabi qui prend son origine dans l'exemple des surfaces de Hirzebruch, vue comme fibrations homogènes sur \mathbb{P}^1 munies d'une action de $\text{SL}_2 \times \mathbb{C}^*$ (voir [Cal82]).

On considère un nombre fini de variétés polarisées $(B_1, L_1), \dots, (B_k, L_k)$ telles que chacun des B_a admette une métrique cscK dans $c_1(L_a)$ (pour $1 \leq a \leq k$). On considère les fibrés principaux en \mathbb{C}^* associés, donnés par les L_a privés de leurs section nulle, et le fibré principal en $(\mathbb{C}^*)^k$ produit sur le produit $B := \prod_{a=1}^k B_a$. Ce fibré est de plus équipé d'une connexion naturelle provenant des métriques cscK sur chaque L_k . On se donne enfin une variété torique X , sous l'action d'un tore $(\mathbb{C}^*)^l$. Ce n'est pas le même tore (c'est utile), mais on se donne aussi un morphisme $(\mathbb{C}^*)^k \rightarrow (\mathbb{C}^*)^l$, ou, de manière équivalente, k sous-groupes à un paramètres $p_a \in X^*((\mathbb{C}^*)^l)$. Alors le fibré Y , de fibre X , de groupe structural $(\mathbb{C}^*)^k$, associé au fibré principal décrit plus tôt est appelé une *fibration principale semisimple torique*.

Étant donné une classe de Kähler α sur X , on construit grâce à la connexion une classe relative α_{rel} sur Y . On appelle *classes de Kähler admissibles* sur Y les classes de Kähler qui s'écrivent sous la forme $\alpha_{\text{rel}} + \sum_{a=1}^k c_a c_1(L_a)$ pour des c_a bien choisis, où bien sûr $c_1(L_a)$ est un raccourci pour parler du tiré en arrière de $c_1(L_a)$ par la projection naturelle $Y \rightarrow B \rightarrow B_a$.

Jubert a montré un résultat remarquable sur l'existence de métriques extrémales sur ces variétés, qui repose, pour sa partie la plus novatrice, sur l'application des méthodes de Chen

et Cheng [CC21] à un sous-espace de fonctions psh adaptées à la structure de fibration. Il montre en fait une correspondance de type Yau-Tian-Donaldson, et une traduction de l'existence de métriques extrémales en termes de fonctions convexes sur le polytope moment de la fibre X .

Définition 2.6.1. Le polytope Δ est *uniformément* (v, w) -stable s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute fonction convexe $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, on ait

$$\mathcal{L}_{v,w}(f) := 2 \int_{\partial\Delta} f v d\sigma - \int_{\Delta} f w d\mu \geq \varepsilon \inf_{\ell \text{ affine}} \int_{\Delta} (f + \ell - \inf(f + \ell)) d\mu$$

où

$$v(x) = \prod_{a=1}^k (p_a(x) + c_a)^{\dim B_a}$$

et

$$w(x) = \left(\ell_{ext}(x) - \sum_{a=1}^k \frac{\dim(B_a) s_a}{p_a(x) + c_a} \right) v(x)$$

avec s_a la courbure moyenne de $c_1(L_a)$ et ℓ_{ext} l'unique fonction affine telle que $\mathcal{L}_{v,w}$ soit nulle sur toutes les fonctions affines.

Théorème 2.6.2. [Jub23] *Il existe une métrique extrémale dans la classe $\alpha_{rel} + \sum_{a=1}^k c_a c_1(L_a)$ si et seulement si le polytope moment $\Delta(X, \alpha)$ est uniformément (v, w) -stable. De plus, une métrique extrémale respecte la structure de fibration (elle est construite à partir d'une métrique sur la fibre via un procédé analogue à celui pour les classes).*

La similarité avec le cas des variétés sphériques est évidente. Les deux cadres ont une intersection non-triviale, mais beaucoup de différences. La plus notable est l'intervention du cône des valuations pour les variétés sphériques. Pour ne pas avoir cet ingrédient qui impacte les notions de K-stabilité, il faut se restreindre aux variétés horosphériques. Mais les variétés horosphériques ne sont pas pour autant incluses dans les fibrations principales semisimples toriques. Dès lors qu'elles ne sont pas toroidales, elles sont en général dépourvue de la structure de fibration demandée. Même dans le cadre des fibrations principales semisimples toriques *avec blowdown* [ACGTF04], les conditions demandées sont réellement différentes de celles pour les variétés horosphériques générales. Plus évident, si on considère un espace homogène projectif qui n'est pas un produit, mais qui a un nombre de Picard supérieur ou égal à deux, alors le \mathbb{P}^1 -fibré associé à un fibré non-ample sur celui-ci n'entre pas dans le cadre des fibrations principales semisimples toriques, alors qu'il est bien sûr horosphérique. Dans l'autre direction, il est évident par les choix de bases possibles, que la plupart des fibrations principales semisimples toriques ne sont pas horosphériques : par exemple, on peut prendre une base qui n'est pas une variété rationnelle, alors que toute variété sphérique est rationnelle.

Dans [DJ23], nous montrons d'abord une condition suffisante combinatoire générale de (v, w) -stabilité uniforme des polytopes, qui est l'analogue de celui que j'ai présenté pour les variétés sphériques. La méthode initiée par Zhou et Zhu s'applique tout aussi bien dans ce cadre. Pour aller plus loin, nous identifions sous quels conditions cette condition suffisante peut vraiment être facilement vérifiée. Le cas où la fibre torique est Fano est particulièrement sympathique.

Théorème 2.6.3. [DJ23] *Soit Y une fibration principale semisimple torique de fibre X Fano. On suppose que $\alpha = t c_1(X)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $2 \dim(B_a) c_a \geq t s_a$, et qu'à chaque sommet*

du polytope moment Δ de (X, α) ,

$$2(\dim(Y) + 1) + \sum_a \frac{ts_a - 2 \dim(B_a)c_a}{p_a(x) + c_a} - t\ell_{ext}(x) \geq 0$$

Alors il existe une métrique de Kähler extrémale dans $\alpha_{rel} + \sum c_a c_1(L_a)$.

En prenant encore des cas plus particuliers, on obtient par exemple :

Corollaire 2.6.4. [DJ23] Une fibration principale semisimple Fano Y admet une métrique de Kähler extrémale dans $c_1(Y)$ si sa fonction extrémale affine l_{ext} vérifie l'inégalité

$$\sup l_{ext} \leq 2(\dim(Y) + 1)$$

Notre condition suffisante permet de construire de nombreuses familles de variétés extrémales, dès qu'on a des candidats pour les fibres. Comme l'existence de métriques Kähler-Einstein sur les variétés Fano de dimension trois est très largement comprise maintenant [ACC⁺23], ces variétés fournissent des exemples naturels de bases possibles.

Proposition 2.6.5. [DJ23] Soit $Y = \mathbb{P}_B(\mathcal{O}_B \oplus H^{-p_1} \oplus H^{-p_2})$ où B une variété Fano de dimension trois, avec une métrique Kähler-Einstein, H est le plus petit diviseur intégral de $c_1(X)$, et $1 \leq p_1 \leq p_2$. Alors il existe une métrique de Kähler extrémale dans la classe de Kähler $c_1(X)_{rel} + \lambda c_1(B)$ pour $\lambda \geq 9p_2$.

Enfin, si l'on se restreint aux métriques cscK plutôt qu'extrémales (c'est-à-dire qu'on demande que ℓ_{ext} soit constante), alors on observe sur les fibrations principales semisimples le même phénomène que sur les variétés sphériques : si $(Y, \alpha_{rel} + \sum c_a c_1(L_a))$ est proche d'être Fano, alors l'existence de métriques cscK est équivalente à la K-stabilité par rapport aux configurations test spéciales.

Mentionnons rapidement que des résultats remarquables ont été obtenus ces dernières années sur la stabilité et l'existence de métriques canoniques sur les fibrations, notamment par Dervan et Sektnan [DS21]. L'approche et les résultats sont extrêmement différents des nôtres : leur objectif est de construire une bonne notion de connexion, pour qu'il existe des métriques extrémales dans un régime adiabatique (courbure concentrée sur la fibre), alors que notre intérêt premier est de comprendre l'existence de métriques extrémales dans des classes fixées, loin du bord du cône de Kähler.

2.7 Quelques projets de recherches

2.7.1 Fibrations de Mori en petits rangs

Après des travaux fondateurs très généraux par Michel Brion [Bri93], la géométrie birationnelle équivariante explicite des variétés sphériques a surtout été étudiée dans le cas particulier des variétés horosphériques par Boris Pasquier et Enrica Floris [Pas09, Pas15, FP22]. Je souhaite explorer cette géométrie birationnelle explicite plus systématiquement, en lien avec l'étude de la K-stabilité, des espaces de K-modules, et de la rigidité birationnelle (équivariante).

Mon objectif principal, qui pourrait donner lieu à un sujet de thèse après une exploration initiale, serait de classer les fibrations de Mori parmi les variétés sphériques de rang deux, et d'en déduire leur ensemble de *souplesse birationnelle équivariante* (equivariant pliability en anglais, voir par exemple [CS22]), c'est-à-dire essentiellement l'ensemble des fibrations

de Mori dans la classe d'isomorphismes birationnels équivariants. Il s'agit en quelque sorte d'une large généralisation du travail de Pasquier [Pas09] qui a classifié les variétés sphériques de rang un et de nombre de Picard égal à un, qui sont un cas particulier de fibrations de Mori.

La stratégie pour obtenir une telle classification suit dans les grandes lignes la stratégie que nous avons adoptée dans [DM23]. Une étape préalable se situe purement en théorie des représentations, et consiste à classifier tous les espaces homogènes sphériques de rang deux (à induction parabolique près), en généralisant la thèse de Wasserman [Was96] qui classifie les espaces homogènes sphériques magnifiques de rang deux. Une fois cette étape réalisée, il faut traduire la condition d'être une fibration de Mori. Celle-ci fait intervenir deux conditions en compétition, l'une sur les singularités et l'autre sur le nombre de Picard relatif, et de cette compétition doit résulter une liste raisonnable de candidats. S'il s'avère que les listes deviennent trop sauvages, on pourrait soit se restreindre à des sous-classes, soit utiliser l'outil informatique, ce qui demande une réflexion importante pour ne pas avoir à traiter une myriade de sous-classes.

Un objectif plus raisonnable à court terme, pour vérifier que le projet est viable, est de réaliser le même objectif, mais pour les variétés sphériques de rang un. Dans ce cadre, on peut aussi espérer une description très précise du programme de Sarkisov, et une conjecture folklore serait probablement simple à vérifier ou infirmer : toute variété Fano a , dans sa classe d'isomorphisme birationnel, une variété K -semistable.

2.7.2 Complexités supérieures

Pour les G -variétés de complexité positive, il y a peu de résultats connus sur la K -stabilité. Parmi ceux-ci, notons quand même que la K -stabilité des variétés Fano (X, K_X^{-1}) qui ont une action de complexité un d'un tore $(\mathbb{C}^*)^{\dim(X)-1}$ est connue, c'était, avec [Del20a] l'une des premières utilisations de la K -stabilité pour démontrer l'existence de métriques Kähler-Einstein. La thèse de Jack Rogers contient aussi l'étude de la K -stabilité des variétés Fano (X, K_X^{-1}) qui ont une action de SL_2 de complexité un. Pour des G -variétés plus générales, et surtout pour d'autres polarisations que l'anticanonique, on n'a pas de résultats généraux.

Dans le cas de l'anticanonique, je pense que les nouvelles techniques développées par Abban et Zhuang [AZ22] pourraient être utiles pour étudier les G -variétés de complexité supérieures. En effet, leurs techniques reposent sur une sorte de récurrence sur la dimension, et on peut imaginer, au moins pour certaines classes de variétés, que ceci permette de se ramener, assez vite, au cas sphérique. Par exemple, on pourrait se concentrer sur les G -variétés dont les adhérences d'orbites sont toutes sphériques. Il est d'ailleurs toujours possible de faire dégénérer une G -variété quelconque vers une telle variété en utilisant la dégénérescence horosphérique de Popov. Cette direction est susceptible de constituer un sujet de thèse.

Du point de vue des polarisations générales, on peut aussi envisager des avancées. En effet, les G -variétés de complexité un *rationnelles* sont toutes des *Mori Dream Space*. Cet argument est utilisé par Chi Li et Yuji Odaka pour montrer que la conjecture de Yau-Tian-Donaldson reliant K -stabilité uniforme et existence de métriques cscK est valide sur les variétés toriques et sphériques. On peut donc espérer, si on sait comprendre les configurations test à considérer, donner une traduction plus combinatoire de l'existence de métriques cscK.

Enfin, un objectif un peu en dehors des G -variétés, mais sur lequel les G -variétés de complexité supérieures peuvent apprendre des choses. Un résultat d'Apostolov, Jubert et Lahdili [AJL22] qui généralise celui de Jubert déjà cité [Jub23] à des fibrations principales semisimples dont la fibre n'est pas nécessairement torique semble impliquer que la K -stabilité

par rapport aux configurations test qui respectent la structure de fibration implique la K-stabilité. Je souhaite trouver une autre preuve de ce résultat seul, qui resterait uniquement du côté de la géométrie algébrique. On peut sans peine envisager alors qu'il s'applique dans des cadres beaucoup plus généraux (variétés singulières, moins de restrictions sur le fibré principal avec connexion sous-jacent).

Géométrie différentielle des variétés horosymétriques

Passons maintenant à la géométrie différentielle des variétés sphériques. Il serait souhaitable de pouvoir étudier la géométrie différentielle (et notamment la géométrie Kählérienne) de toutes les variétés sphériques, mais cela reste pour le moment une tâche intimidante à la vue de tous les exemples possibles de variétés sphériques. Dans mon travail de recherche, j'ai identifié une sous-classe naturelle des variétés sphériques, sur laquelle je suis capable de décrire de manière satisfaisante la géométrie différentielle (invariante sous un groupe compact maximal) en termes de géométrie convexe sur un espace vectoriel. Cette sous-classe, c'est celle des variétés horosymétriques, introduite dans [Del20b]. C'est un mot valise obtenu en fusionnant les mots *horosphérique* et *symétrique*, et il ne faut pas penser que les variétés horosymétriques sont aux variétés symétriques ce que les variétés horosphériques sont aux variétés sphériques.

3.1 La classe des variétés horosymétriques

3.1.1 Définition

Définition 3.1.1. [Del20b] Une G -variété algébrique normale X est *horosymétrique* si elle est sphérique, et si l'orbite ouverte G/H sous l'action de G est obtenue par induction parabolique à partir d'un espace symétrique complexe réductif G_0/H_0 , c'est-à-dire qu'il existe une involution de groupe complexe σ sur G_0 telle que $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}_0^\sigma$, la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g}_0 fixée par σ .

Pour interpréter cette définition dans un cadre de géométrie différentielle, il est utile d'interpréter la construction par induction parabolique comme une fibration : l'espace homogène $G/H = (G \times G_0/H_0)/Q$ est une fibration homogène de base l'espace homogène projectif G/Q , et de fibre l'espace homogène G_0/H_0 .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{G/H} & \leftrightarrow & Q/H = G_0/H_0 \\ \downarrow & & \\ G/Q & & \end{array}$$

Dans le cas horosymétrique, la fibre est un espace symétrique complexe réductif, comme défini ci-dessus. Le lien avec les espaces symétriques Riemanniens, plus familier aux géomètres différentiels est très fort : si G^r est un groupe de Lie réel semisimple, et G^r/H^r est un espace symétrique sous l'action de G^r , alors en prenant G^c et H^c les groupes complexifiés de G^r et H^r , l'espace homogène G^c/H^c obtenu est un espace symétrique complexe réductif (en fait, semisimple). La variété différentielle sous-jacente est difféomorphe à l'espace (co-)tangent de G^r/H^r , qu'on munit d'une structure complexe naturelle. Il faut faire attention que, dans le cas où G^r/H^r est un espace homogène hermitien, donc muni d'une structure complexe, la structure complexe considérée sur G^c/H^c n'est pas celle de fibré (co-)tangent complexe.

Quand on considère les espaces symétriques complexes réductifs plutôt que semisimples, on autorise le groupe à être réductif plutôt que semisimple, et cela autorise en particulier des facteurs toriques. Par exemple, si $G_0 = (\mathbb{C}^*)^k$, on peut considérer l'involution de groupe complexe $\sigma(t) = t^{-1}$, qui ne laisse fixe que la sous-algèbre de Lie nulle. Ainsi, H_0 est un groupe fini, par exemple trivial, et le tore $(\mathbb{C}^*)^k$ lui-même est autorisé comme fibre. De cette manière, on retrouve les fibrations homogènes en tores sur un espace homogène projectif parmi les orbite ouvertes denses possibles. Cela montre que les variétés horosphériques font partie des variétés horosymétriques.

En général, une variété horosymétrique n'a pas une structure globale de fibration homogène sur une variété projective homogène.

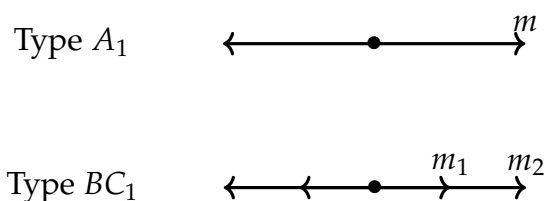
3.1.2 Données combinatoires

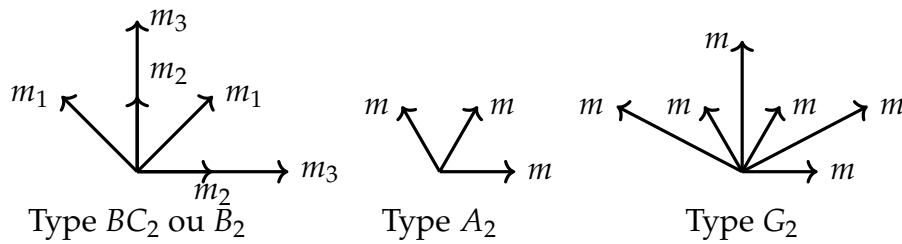
L'involution σ de la définition se relève en une involution de Q . Soit T_s un sous-tore de Q , maximal pour la propriété que σ agisse sur T comme l'inversion. Soit T un tore maximal de Q , qui est σ -stable et contient T_s . Soit Φ le système de racines de (G, T) . On note Φ_Q le sous-ensemble des racines de Q , et Φ_{Q^u} celui des racines du radical unipotent de Q . L'involution σ agit sur Φ_Q , en laissant stable $\Phi_Q \setminus \Phi_{Q^u}$.

Il existe un sous-groupe de Borel B tel que $\Phi_B \cap \Phi_{Q^u} = \emptyset$, et pour tout $\alpha \in \Phi_B \setminus (-\Phi_{Q^u})$, on a soit $\sigma \cdot \alpha = \alpha$, soit $\sigma \cdot \alpha \in -\Phi_B$. On choisit un tel sous-groupe de Borel pour décrire les données combinatoires.

On note Φ_s l'ensemble des racines α de Q telles que $\alpha \notin \Phi_{Q^u}$ et $\sigma \cdot \alpha \neq \alpha$. L'image $\bar{\Phi}$ de l'application $\alpha \mapsto \alpha - \sigma \cdot \alpha$ restreinte aux racines dans Φ_s , est un système de racine (qui peut être non-réduit, c'est-à-dire qu'une racine et son double peuvent apparaître), appelé le *système de racines restreintes*. L'image des racines positives forme un ensemble de racines positives pour $\bar{\Phi}$. On observe que $\bar{\Phi} \subset X^*(T/(T \cap H))$. À ce système de racines est associé un réseau des racines restreintes (le groupe engendré par $\bar{\Phi}$) et un réseau de poids restreints.

Pour chaque racine $\alpha \in \Phi_Q$ telle que $\alpha \notin \Phi_{Q^u}$ et $\sigma \cdot \alpha \neq \alpha$, on appelle multiplicité de α et on note m_α le nombre de racines qui sont envoyées sur $\alpha - \sigma \cdot \alpha$. Voici quelques exemples de systèmes de racines restreintes.





On note α^\vee la coracine de $\alpha \in \Phi$, définie comme l'unique élément de $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$ tel que, pour la forme de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et pour tout $x \in X_*(T) \otimes \mathbb{R}$,

$$\alpha(x) = \frac{2\langle x, \alpha^\vee \rangle}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle}$$

On note aussi $\bar{\alpha}^\vee$ la coracine restreinte de $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$, définie par

- $\bar{\alpha}^\vee = \frac{\alpha^\vee}{2}$ si $-\sigma \cdot \alpha = \alpha$
- $\bar{\alpha}^\vee = \frac{1}{2}(\alpha^\vee + (-\sigma \cdot \alpha)^\vee)$ si $(\sigma \cdot \alpha)(\alpha^\vee) = 0$
- $\bar{\alpha}^\vee = (\alpha - \sigma \cdot \alpha)^\vee$ si $(\sigma \cdot \alpha)(\alpha^\vee) = 1$, auquel cas $\alpha - \sigma \cdot \alpha$ est une racine.

Proposition 3.1.2. [Del20b] Le réseau des poids de G/H est $M = X^*(T/(T \cap H))$. C'est un réseau compris entre le réseau des poids restreints et le réseau des racines restreintes.

Le cône des valuations \mathcal{V} de G/H est le cône dans $N \otimes \mathbb{R}$ défini par $x \in \mathcal{V}$ si et seulement si pour tout $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$, $\bar{\alpha}(x) \leq 0$, autrement dit, c'est la chambre de Weyl restreinte négative.

Les couleurs de G/H se décomposent en deux parties : $\mathcal{C}(G/H) = \mathcal{C}_b \sqcup \mathcal{C}_f$.

Une couleur dans \mathcal{C}_b est, pour chaque racine simple α de B telle que $-\alpha \in Q^\mu$, le tiré en arrière de l'unique couleur sur l'espace homogène projectif G/Q_α par la projection $G/H \rightarrow G/Q \rightarrow G/Q_\alpha$, où Q_α est le sous-groupe parabolique propre maximal de G contenant Q et tel que $-\alpha \in \Phi_{Q_\alpha}^\mu$. Pour une telle couleur $C \in \mathcal{C}_b$, on a $C|_M = \alpha^\vee|_{M \otimes \mathbb{R}}$.

Les couleurs de \mathcal{C}_f sont exactement les orbites de codimension 1 de B dans G/H construites en transportant, par l'action de B , les orbites de codimension 1 dans la fibre G_0/H_0 sous l'action de l'image B_0 de $B \cap Q$ dans G_0 . L'ensemble des $C|_M$, pour $C \in \mathcal{C}_f$, coïncide avec l'ensemble des coracines restreintes des racines restreintes simples. Si l'espace symétrique G_0/H_0 n'a pas de facteur hermitien, alors \mathcal{C}_f est en bijection avec l'ensemble des coracines restreintes des racines restreintes simples.

3.1.3 Diviseurs et dégénérescences

Une des raisons pour lesquelles j'ai introduit la classe des variétés horosymétriques est la propriété suivante.

Proposition 3.1.3. [Del20b, Proposition 4.21] Soit X une G -variété horosymétrique, et D une hypersurface G -stable dans X . Alors D est une G -variété horosymétrique.

La preuve de cette propriété repose sur une description par Brion des limites de sous-groupes sphériques [Bri90], qui peut s'interpréter assez simplement dans le cas horosymétrique.

Cette propriété est utile à plusieurs égards. Par exemple, si on considère des paires (X, D) où X est horosymétrique et D est un diviseur G -stable, on peut étudier X et D avec les mêmes outils. Cette propriété a aussi joué un rôle fondamental dans notre construction de métriques Ricci plates sur les espaces symétriques avec Olivier Biquard [BD19], que je décrirai plus loin. En lien avec la K -stabilité étudiée dans la première partie, cette propriété s'applique aussi aux dégénérescences.

Corollaire 3.1.4. *Si \mathcal{X} est l'espace total d'une configuration test pour X , et que D est une composante irréductible du support de la fibre centrale, alors D est une variété horosymétrique.*

3.1.4 La sous-variété torique

Soit θ une involution de Cartan de G , qui commute avec σ sur T , et K le sous-groupe compact maximal correspondant. Soit $\mathfrak{a}_s = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{t}_s$ l'algèbre de Lie de la partie non-compacte du tore T_s . Cette algèbre de Lie s'identifie naturellement à $X^*(T_s) \otimes \mathbb{R}$, donc aussi à $N \otimes \mathbb{R}$, puisque l'application naturelle $T_s \rightarrow T/(T \cap H)$ est une isogénie. En particulier, on peut identifier le cône des valuations \mathcal{V} à un sous-ensemble de \mathfrak{a}_s .

Proposition 3.1.5. *[Del20b] L'image du cône des valuations \mathcal{V} par l'application $\mathfrak{a}_s \rightarrow G/H, x \mapsto \exp(x)H$ est un domaine fondamental pour l'action de K sur G/H .*

L'adhérence $Z = \overline{T_s H / H}$ de l'orbite de T_s est une variété torique sous l'action (d'un quotient) de T_s , elle intersecte toute orbite de K dans X le long d'une orbite du produit semi-direct du sous-tore compact avec le groupe de Weyl restreint \bar{W} .

Par conséquent, on peut espérer traduire toute la géométrie K -équivariante de X en de la géométrie équivariante sur cette sous-variété torique Z , et en utilisant la géométrie torique, à de la géométrie convexe \bar{W} -équivariante sur l'espace vectoriel \mathfrak{a}_s . C'est ce qu'on a fait pour les métriques hermitiennes à courbures positives et leurs courbures, dans le but d'appliquer ça à l'étude des métriques canoniques.

3.1.5 Polytopes moments

Soit L un fibré en droite G -linéarisé sur une G -variété horosymétrique X . On fixe $\xi \in L_{eH}$ un élément de la fibre au-dessus de la classe eH dans l'orbite ouverte G/H .

Proposition 3.1.6. *[Del20b] Le fibré L est uniquement déterminé par :*

1. son caractère d'isotropie $\chi_L : H \rightarrow \mathbb{C}^*$ défini par l'action de H sur L_{eH}
2. son diviseur spécial D_s défini comme le \mathbb{Q} -diviseur égal à $\frac{1}{k}$ le diviseur d'une section B -équivariante méromorphe de L^k dont le poids sous l'action de B est dans $X^*(T/T_s)$.

En fait, on oubliera un peu d'informations sur le caractère d'isotropie, et on retiendra uniquement le morphisme $\chi_L : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\chi_L(x) = \chi_L(\exp((x + \sigma(x))/2))$.

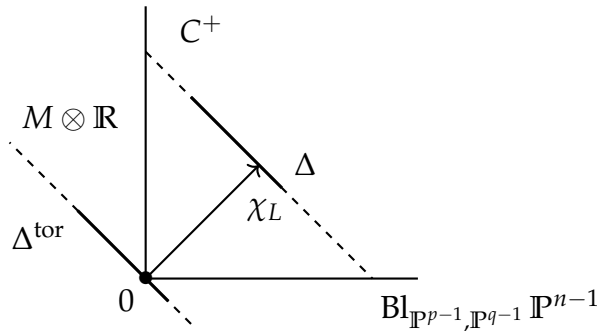
Au \mathbb{Q} -diviseur B -stable D_s , ou plutôt à la section B -équivariante correspondante, on associe le polytope spécial Δ_s comme plus tôt. Même si on est passé par des \mathbb{Q} -diviseurs, essentiellement par définition le polytope moment de L est toujours $\Delta^+ = \chi_L + \Delta_s$. Réciproquement, on retrouve le polytope spécial à partir du polytope moment par la projection naturelle $X^*(T) \otimes \mathbb{R} \rightarrow X^*(T_s) \otimes \mathbb{R} = X^*(T/(T \cap H)) \otimes \mathbb{R}$. De cette manière, on retrouve bien sûr aussi le caractère d'isotropie comme élément de $X^*(T/T_s) \otimes \mathbb{R}$.

Nous pouvons maintenant relier le polytope moment de L à celui de sa restriction à $L|_Z$. On appelle polytope torique Δ^{tor} associé à L le polytope de la restriction de L à Z , avec la même définition que pour les variétés sphériques.

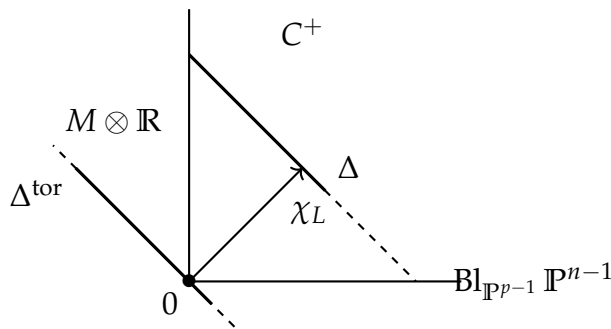
Proposition 3.1.7. *[Del20b] Le polytope Δ^{tor} est l'enveloppe convexe des images par \bar{W} du polytope spécial Δ_s .*

Réciproquement, si $\Delta^+ \cap X^(T/(T \cap [L, L])) \otimes \mathbb{R} \neq 0$, alors $\Delta_s = \Delta^{\text{tor}} \cap \bar{C}^+$, où L désigne un sous-groupe de Levi de Q , et \bar{C}^+ est la chambre de Weyl restreinte positive dans $M \otimes \mathbb{R}$.*

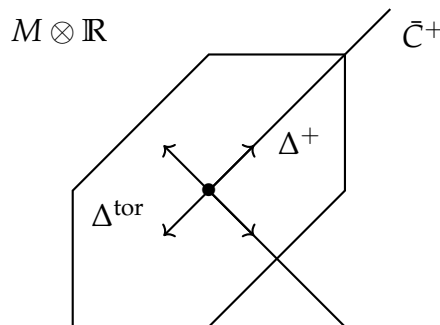
La condition dans la réciproque n'est pas toujours vérifiée ! Cependant, elle sera toujours vérifiée pour le fibré anticanonique, et même pour tout fibré si la fibre symétrique G_0/H_0 n'a aucun facteur hermitien. Pour illustrer les différentes données, on peut dessiner quelques exemples. D'abord, deux exemples horosphériques, auquel cas le polytope moment est obtenu par translation à partir du polytope torique, mais le polytope moment n'est pas en général dans $M \otimes \mathbb{R}$. Pour $\text{Bl}_{\mathbb{P}^{p-1}, \mathbb{P}^{q-1}} \mathbb{P}^{n-1}$ par exemple, qui est une variété horosphérique toroidale, le polytope moment est de la forme suivante, et ses bords ne peuvent pas toucher les murs de la chambre de Weyl C^+ pour un fibré ample.



Par contre, dans le cas d'une variété horosphérique colorée, le polytope moment doit toucher certains murs de la chambre de Weyl. Par exemple, pour $\text{Bl}_{\mathbb{P}^{p-1}} \mathbb{P}^{n-1}$, les polytopes moments sont de la forme suivante.



Dans le cas d'une variété symétrique sans facteur hermitien, le polytope moment et le polytope torique vivent tous deux dans $M \otimes \mathbb{R}$, et le polytope moment est obtenu par intersection du polytope torique avec la chambre de Weyl restreinte positive.



Dans le cas d'un espace symétrique hermitien, d'autres subtilités peuvent intervenir. L'exemple le plus simple est $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ équipé de l'action diagonale de SL_2 . C'est une variété symétrique de rang un dont l'orbite ouverte est l'espace homogène SL_2 / SO_2 . Les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont les $O(k, m)$, ils sont amples lorsque $k > 0$ et $m > 0$. Par invariance sous l'action du groupe de Weyl restreint, le polytope torique est nécessairement

de la forme $[-a\alpha, a\alpha]$ (où α est l'unique racine restreinte positive), il n'y a plus qu'un seul paramètre... En fait, on montre que les polytopes moments et toriques pour $O(k, m)$ sont $\Delta^{\text{tor}} = [-(k+m)\alpha/2, (k+m)\alpha/2]$ et $\Delta^+ = [|k-m|\alpha/2, (k+m)\alpha/2]$.

$$-\frac{k+m}{2}\alpha \quad \frac{|k-m|}{2}\alpha \quad \frac{k+m}{2}\alpha$$

3.2 Métriques et courbures

3.2.1 Quasipotential et potentiel torique

Dans [Del20b], j'ai tenté de traduire la géométrie des variétés horosymétrique de manière aussi proche que possible de celle des variétés toriques. La sous-variété torique mentionnée plus tôt joue un rôle important pour ça, et on verra qu'elle permet d'encoder le comportement à l'infini. Par contre, des difficultés se posent pour considérer ce qu'il se passe sur l'orbite ouverte. Le problème le plus immédiat est que sa topologie n'est pas en général triviale, et par conséquent les fibrés sur l'orbite ouverte ne sont pas nécessairement triviaux (c'est ce que le caractère d'isotropie encode), donc les métriques hermitiennes et leurs courbure ne peuvent pas, *a priori*, être encodées par une seule fonction. Pour montrer qu'on peut, en fait, le faire, on utilise une idée qui nous a été inspirée par les *quasipotentiels* de l'article [AB03].

Soit L un fibré en droite sur une variété horosymétrique X d'orbite ouverte G/H . Soit h une métrique hermitienne sur L . On considère le tiré en arrière π^*L sous l'application quotient $\pi : G \rightarrow G/H$ de la restriction de L à G/H . Sur G , le fibré π^*L est trivialisable, de manière équivariante. On fixe une telle section trivialisante, notée s .

Définition 3.2.1. Le *quasipotential* de h est la fonction ϕ définie sur G par

$$\phi(g) = -2 \ln |s(g)|_{\pi^*h}$$

Si h est une métrique hermitienne K -invariante, son *potentiel torique* est la fonction définie sur \mathfrak{a}_s par

$$u(x) = \phi(\exp(x))$$

Alors on vérifie facilement les propriétés d'équivariances suivantes.

Proposition 3.2.2. [Del20b] Pour $g_1 \in K, g_2 \in G, g_3 \in H$, on a

$$\phi(g_1 g_2 g_3) = \phi(g_2) - 2 \ln |\chi(g_3)|$$

où χ est le caractère d'isotropie de L .

Comme tout élément de G s'écrit sous la forme $g_1 g_2 g_3$ avec $g_1 \in K, g_2 = \exp(x)$ pour $x \in \mathfrak{a}_s$ et $g_3 \in H$, ces propriétés permettent de passer de u à ϕ et à h , et réciproquement. De plus, u est invariante sous l'action du groupe de Weyl restreint.

Le polytope torique encode le comportement asymptotique du potentiel torique, au moins lorsque la métrique est localement bornée. Soit $v_\Delta : \mathfrak{a}_s \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction support du polytope Δ , définie par $v_\Delta(x) = \sup\{m(x) \mid m \in \Delta\}$.

Proposition 3.2.3. [Del20b] Si h est une métrique hermitienne K -invariante sur L , fibré en droite ample sur X . Alors h est localement bornée si et seulement la fonction $x \mapsto u(x) - 2v_\Delta(-x)$ est bornée sur \mathfrak{a}_s .

La preuve repose d'une part sur le procédé de décoloration, qui remplace X par son plus petit modèle birationnel G -équivariant *toroidal*, et le cas des variétés toriques. Pour les variétés toriques, le résultat découle du fait que la fonction $x \mapsto -2v_\Delta(-x)$ est le potentiel torique d'une métrique hermitienne continue, dite métrique de Batyrev-Tschinkel [Mai00].

3.2.2 Courbure

L'autre difficulté est de traiter, dans les calculs de courbure, toutes les directions qui sortent du domaine fondamental pour l'action de K . Ici, la théorie de Lie intervient de manière très pratique pour choisir des coordonnées adaptées au calcul. On choisit des vecteurs de racines $0 \neq e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ dans les espaces de racines de \mathfrak{g} , tels que $[\theta(e_\alpha), e_\alpha] = \alpha^\vee$ pour l'involution de Cartan θ qui définit le sous-groupe compact maximal K de G . Ceci permet de donner une base explicite de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} :

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{Qu}} \mathbb{C}e_\alpha \oplus \mathfrak{t}^\sigma \oplus \bigoplus_{\sigma \cdot \alpha = \alpha} \mathbb{C}e_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_s^+} \mathbb{C}(e_\alpha + \sigma(e_\alpha))$$

On en déduit un choix de coordonnées locales en tout point de G/H : on fixe (l_1, \dots, l_r) une base de \mathfrak{a}_s , et on considère les coordonnées complexes au voisinage de $gH \in G/H$ données par

$$g \exp \left(\sum_{j=1}^r z_j l_j + \sum_{\alpha \in \Phi_{Qu}} z_\alpha e_{-\alpha} + \sum_{\beta \in \Phi_s^+} z_\beta (e_\alpha - \sigma(e_\alpha)) \right) H$$

Ce choix dépend a priori du représentant g de gH , mais fournit naturellement une base de $(1,0)$ -formes $\exp(\mathfrak{a}_s)$ -invariantes sur $\exp(\mathfrak{a}_s)H/H$, notées γ_\diamond pour $\diamond \in \{1, \dots, r\} \cup \Phi_{Qu} \cup \Phi_s^+$, et des $(1,1)$ -formes associées $\omega_{\diamond, \heartsuit} = i\gamma_\diamond \wedge \bar{\gamma}_{\heartsuit}$.

Théorème 3.2.4. [Del20b] *Soit ω la forme de courbure d'une métrique hermitienne K -invariante, de potentiel torique u , sur un fibré L de caractère d'isotropie χ . Soit $a \in \mathfrak{a}_s$ tel que $\beta(a) \neq 0$ pour tout $\beta \in \Phi_s$. Alors*

$$\omega_{\exp(a)H} = \sum \Omega_{\diamond, \heartsuit} \omega_{\diamond, \heartsuit}$$

où on somme sur tous les indices possibles \diamond et \heartsuit dans $\{1, \dots, r\} \cup \Phi_{Qu} \cup \Phi_s^+$, et les coefficients $\Omega_{\diamond, \heartsuit}$ sont tous nuls sauf les suivants (toutes les quantités sont évaluées en a) :

$$\Omega_{j_1, j_2} = \frac{1}{4} d^2 u(l_{j_1}, l_{j_2}), \quad \Omega_{j, \beta} = \frac{1}{2} \beta(l_j) (1 - \tanh^2(\beta)) \chi(\theta(\mu_\beta)),$$

$$\Omega_{\alpha, \alpha} = \frac{e^{-2\alpha}}{2} (du - 2\chi)(\alpha^\vee), \quad \Omega_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{2\chi([\theta(e_{\alpha_2}), e_{\alpha_1}])}{e^{2\alpha_1} + e^{2\alpha_2}},$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\beta_1, \beta_2} = & \frac{\tanh(\beta_2 - \beta_1)}{2} \left\{ \frac{1}{\sinh(2\beta_1)} - \frac{1}{\sinh(2\beta_2)} \right\} \chi([\theta(e_{\beta_2}), e_{\beta_1}]) \\ & + \frac{\tanh(\beta_1 + \beta_2)}{2} \left\{ \frac{1}{\sinh(2\beta_2)} + \frac{1}{\sinh(2\beta_1)} \right\} \chi([\theta(e_{\beta_2}), \sigma(e_{\beta_1})]) \end{aligned}$$

et

$$\Omega_{\beta, \beta} = \frac{du(\beta^\vee)}{\sinh(2\beta)} - \frac{2}{\cosh(2\beta)} \chi([\theta(\sigma(e_\beta)), e_\beta])$$

Tel qu'énoncé ci-dessus, le résultat semble difficile à utiliser. En fait, dans la plupart des situations, il y a plus d'annulations dans les coefficients.

Corollaire 3.2.5. *Si la restriction de L à la fibre symétrique est trivialisable, alors ω est diagonale par blocs, avec un bloc de taille r donnée par*

$$\sum_{j_1, j_2} \frac{1}{4} d_a^2 u(l_{j_1}, l_{j_2}) \omega_{j_1, j_2}$$

et des blocs de taille 1 donnés pour $\alpha \in \Phi_{Q^u}$ par

$$\frac{e^{-2\alpha(a)}}{2} (d_a u - 2\chi)(\alpha^\vee) \omega_{\alpha, \alpha}$$

et pour $\beta \in \Phi_s^+$ par

$$\frac{d_a u(\beta^\vee)}{\sinh(2\beta(a))} \omega_{\beta, \beta}$$

C'est en particulier toujours le cas pour le fibré anticanonique, et c'est aussi le cas pour tous les fibrés si la fibre symétrique n'a aucun facteur hermitien. Par contre, on montre par des exemples dans [Del20b] que chacun des termes du théorème peut être non-nul. On va voir que dans le cas favorable précédent, le résultat est suffisant pour traduire les équations de type Kähler-Einstein comme des équations de Monge-Ampère réelles. Le cas général reste un peu mystérieux. À ma connaissance, il n'a pas été exploré à l'exception peut-être du cas des métriques Ricci plates sur les espaces symétriques complexes hermitiens de rang un. Le fait que la théorie du point de vue algèbro-géométrique ne soit pas plus complexe suggère que l'analyse doit être réalisable, mais il est possible que le point de vue que nous avons adopté (par exemple les coordonnées utilisées) ne soit pas le mieux adapté au problème.

La preuve du théorème repose sur l'usage de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff pour les calculs dans les coordonnées choisies, en remontant au quasipotentiel et en utilisant ses propriétés d'équivariance. Elle demande le calcul au cas par cas de certains crochets de Lie qui est assez fastidieux, mais elle est susceptible de s'appliquer dans des cadres beaucoup plus généraux (que ce soit en terme d'opérateurs comme en termes d'espaces homogènes considérés).

Avant d'utiliser le théorème pour traduire des équations de Monge-Ampère complexes en équations de Monge-Ampère réelles, observons qu'il permet essentiellement de retrouver le résultat suivant, qui peut aussi se déduire du cas des espaces symétriques traité par Azad et Loeb [AL92].

Corollaire 3.2.6. *Soit h une métrique hermitienne K -invariante à courbure positive sur un fibré linéarisé L sur G/H , alors son potentiel torique u est une fonction convexe.*

Ceci permet aussi de réinterpréter le polytope torique Δ^{tor} .

Corollaire 3.2.7. [Del20b] *Soit h une métrique hermitienne K -invariante à courbure positive sur un fibré linéarisé L sur X . On suppose que h est lisse sur G/H , et localement bornée sur X , alors on a*

$$\{d_a u \mid a \in \mathfrak{a}_s\} = \text{Int}(-2\Delta^{\text{tor}})$$

3.2.3 Application à la fonctionnelle de Mabuchi

Dans la dernière partie de l'article [Del20b], nous appliquons notre compréhension de la géométrie Kählérienne des variétés horosymétriques pour calculer leur fonctionnelle de Mabuchi, et en tirer une condition suffisante d'existence de métriques cscK, via les résultats

de [CC21]. Cette application était inspirée de travaux analogues de Li, Zhou et Zhu pour les compactifications de groupes.

Le calcul des fonctionnelles classiques de l'approche variationnelle à l'existence de métriques cscK me paraît d'importance indépendante de la condition suffisante, et repose notamment sur le calcul de la courbure scalaire. Pour celle-ci, on peut notamment imaginer des applications à l'étude de la prescription de courbure scalaire sur des variétés horosymétriques non-compactes. Il faut cependant noter que l'expression est singulièrement plus complexe que la formule magique obtenue par Abreu pour la courbure scalaire sur les variétés toriques [Abr98].

Pour la condition suffisante elle-même, je l'ai largement généralisé dans [Del23c]. Là encore, il est intéressant de noter que, dans l'approche analytique j'avais du imposer un certain nombre de conditions simplificatrices. Celles-ci n'ont aucune interprétation dans le cadre de la preuve via la K-stabilité. Cela suggère que les difficultés rencontrées pourraient être résolues d'une manière analytique. J'aimerais, si une motivation supplémentaire se présente, revenir là-dessus et mieux comprendre la géométrie analytique sous-jacente dans les cas difficiles.

3.3 Métriques canoniques dans l'anticanonique

3.3.1 Quelques métriques canoniques alternatives

Lorsqu'une variété Fano n'admet pas de métrique Kähler-Einstein, il est naturel de chercher d'autres métriques canoniques pour les remplacer. L'alternative la plus naturelle du point de vue de la géométrie Riemannienne est la notion de soliton de Kähler-Ricci.

Définition 3.3.1. Une variété Fano X admet un *soliton de Kähler-Ricci* ω si ω est une forme de Kähler sur X telle que

$$\text{Ric}(\omega) - \omega = L_{\xi}\omega$$

où ξ est un champ de vecteur holomorphe sur X , et $L_{\xi}\omega$ désigne la dérivée de Lie de ω .

On se rappelle qu'on avait caractérisé plus tôt les métriques Kähler-Einstein par $h = \text{constante}$, où h est le potentiel de Ricci, défini à contante additive près par $\text{Ric}(\omega) - \omega = i\partial\bar{\partial}h$. Lorsque ω est Kähler et ξ est un champ de vecteur holomorphe, il existe toujours une fonction $\theta_{\xi,\omega}$ telle que $L_{\xi}\omega = i\partial\bar{\partial}\theta_{\xi,\omega}$. Là encore, cette fonction n'est bien définie qu'à une constante additive près. On en déduit que ω est un soliton de Kähler-Ricci si et seulement si $h = \theta_{\xi,\omega}$ pour un champ de vecteur holomorphe ξ .

Plus généralement, la notion de *soliton à poids*, qui remonte à Mabuchi [Mab03] sous un autre nom, regroupe toutes les métriques telles que $h = g \circ \theta_{\xi,\omega}$ pour un champ de vecteur ξ et une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. C'est une notion très riche. D'une part, elle permet de trouver des métriques canoniques (si on impose une forme naturelle à g , par exemple $g = \text{id}$) sur X . D'autre part, elle permet souvent d'encoder, sur X , l'existence de métriques canoniques plus habituelles sur d'autres variétés reliées à X (par exemple, des métriques Kähler-Einstein sur des fibrations principales semisimples de fibre X , ou des métriques de Sasaki-Einstein sur l'entrelac du cône anticanonique sur X). Il s'agit donc de métriques très naturelles, et pour lesquelles on a encore beaucoup à dire.

Pour autant, ce type de métrique n'a aucune chance d'exister sur une variété Fano qui n'a pas d'automorphismes et pas de métriques Kähler-Einstein. Ou alors, en présence d'automorphisme, si on veut que la métrique canonique ait le plus grand groupe d'isométries possibles, il faut que le champ de vecteur considéré commute à ce groupe d'isométries. C'est

impossible, par exemple, pour un champ de vecteur non-nul si le groupe d'automorphismes est semisimple. Une autre alternative sur les variétés Fano a été proposée par Jakob Hultgren et David Witt Nyström [HWN19], il s'agit des métriques Kähler-Einstein couplées.

Définition 3.3.2. Un uplet de formes de Kähler $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ sur une variété Fano X est *Kähler-Einstein couplé* si pour $1 \leq j \leq k$,

$$\text{Ric}(\omega_j) = \omega_1 + \dots + \omega_k$$

On peut voir ça, comme dans la définition, comme un uplet de métriques de Kähler, mais aussi comme la donnée d'une seule métrique canonique $\omega_1 + \dots + \omega_k$ dans l'anticanonique, relative à la donnée des classes de Kähler $[\omega_j]$ telles que $c_1(X) = [\omega_1] + \dots + [\omega_k]$. En effet, par le Théorème de Calabi-Yau, la forme ω_j se retrouve comme l'unique solution de l'équation $\text{Ric}(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_k$ dans la classe de Kähler $[\omega_j]$.

Hultgren et Witt Nyström ont montré que ces métriques partageaient de nombreuses propriétés avec les métriques Kähler-Einstein standard, en obtenant un analogue des obstructions de Matsushima, de Futaki, etc. Hultgren a, de plus, démontré qu'il existe une variété sans métriques Kähler-Einstein, qui admet des métriques Kähler-Einstein couplées : l'exemple donné par Futaki de variété Fano avec un groupe d'automorphisme réductif mais un invariant de Futaki non-nul [Hul19].

Avec Jakob Hultgren, nous avons introduit dans [DH21] un cadre réunissant ces différents types de métriques sur les variétés Fano, plus tard appelées *solitons à poids couplés*.

Définition 3.3.3. [DH21] Un uplet $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ de formes de Kähler sur X est un *soliton à poids couplé* s'il existe des fonctions $g_j : X \rightarrow \mathbb{R}$, des champs de vecteurs holomorphes ξ_j tels que, pour $1 \leq j \leq k$,

$$\text{Ric}(\omega_j) - i\partial\bar{\partial}g_j(\theta_{\xi_j, \omega_j}) = \omega_1 + \dots + \omega_k$$

3.3.2 Critère combinatoire

On suppose que, pour tous les fibrés linéarisés qui apparaissent dans cette section, la restriction à la fibre symétrique G_0/H_0 est trivialisable. Avec Jakob Hultgren, nous avons obtenu une caractérisation combinatoire de l'existence des solitons à poids couplés sur les variétés horosymétriques Fano. Pour l'énoncer, on note Δ_L le polytope spécial de L pour tout fibré en droite linéarisé, P_L le polynôme de Duistermaat-Heckman associé par (2.2), et pour g une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\xi \in \bar{\Phi}^\perp \subset \mathfrak{a}_s^*$, on pose :

$$\text{Vol}_{L, g, \xi} := \int_{\Delta_L} e^{g \circ \xi(p)} P_L(p) dp$$

et

$$\text{Bar}_{L, g, \xi} := \int_{\Delta_L} e^{g \circ \xi(p)} P_L(p) \frac{dp}{\text{Vol}_{L, g, \xi}}$$

Soit de plus δ une $(1, 1)$ -forme semi-positive K -invariante. On peut aussi y associer un polytope torique $\Delta_{[\delta]}^{\text{tor}}$ par interpolation.

Théorème 3.3.4. [DH21] *Le système d'équations*

$$\forall j, \quad \text{Ric}(\omega_j) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}g_j(\theta_{\omega_j, \xi_j}) = \omega_1 + \dots + \omega_k + \delta$$

admet une solution dans $c_1(L_1) \times \dots \times c_1(L_k)$ si et seulement si

$$\sum \text{Bar}_{L_j, g_j, \xi_j} - 2\rho_H \in \text{Int}\left(\Delta_{[\delta]}^{\text{tor}} + (\bar{C}^+)^{\vee}\right)$$

On retrouve, en première application directe, le critère combinatoire d'existence de métriques Kähler-Einstein de [Del20a], pour le cas particulier des variétés horosymétriques. L'introduction de la forme δ permet de traiter des métriques canoniques tordues. Elle permet en particulier d'obtenir comme corollaire direct le temps maximal d'existence d'une solution le long de la méthode de continuité de Yau, noté $GRLB(X)$, sur une variété (horosymétrique) Fano X . Cet invariant est aussi appelé *greatest Ricci lower bound* puisqu'on peut le caractériser comme

$$GRLB(X) = \sup\{t > 0 \mid \exists \omega \in c_1(X), \text{Ric}(\omega) \geq t\omega\}$$

Dans le cadre de la caractérisation valuative de la K-stabilité, $GRLB(X)$ est très fortement relié avec l'invariant delta $\delta(X)$, puisque ces deux nombres coïncident lorsque la variété n'est pas K-stable.

Corollaire 3.3.5. [DH21] *Le nombre $GRLB(X)$ se calcule par*

$$\sup \left\{ t \in]0, 1[; 2\rho_H + \frac{t}{1-t}(2\rho_H - \mathbf{Bar}_{ac}) \in \text{Int}(\Delta_{ac} - (\bar{C}^+)^{\vee}) \right\}$$

Le résultat se spécialise aussi pour divers types de solitons classiques, illustrons cela par le cas des solitons de Kähler-Ricci.

Corollaire 3.3.6. [DH21] *Une variété horosymétrique Fano X admet un soliton de Kähler-Ricci si et seulement s'il existe un $\zeta \in \bar{\Phi}^{\perp}$ tel que*

$$\mathbf{Bar}_{ac, \zeta} - 2\rho_H \in \text{Int}((\bar{C}^+)^{\vee})$$

Exemple 3.3.7. 1. Pour $2 \leq k \leq n - 3$, $\text{Bl}_{Q^k}(Q^n)$ n'admet aucun soliton de Kähler-Ricci, ni en fait, aucun soliton à poids [Del22].

2. Toute variété horosphérique Fano admet un soliton de Kähler-Ricci [Del20a].

Enfin, dans le cas des métriques couplées, relevons le cas particulier des métriques Kähler-Einstein couplées.

Théorème 3.3.8. [DH21] *Il existe des métriques Kähler-Einstein couplées pour la décomposition $c_1(X) = c_1(L_1) + \dots + c_1(L_k)$ si et seulement si*

$$\sum_i \mathbf{Bar}_{L_i} - 2\rho_H \in \text{Int}((\bar{C}^+)^{\vee})$$

Exemple 3.3.9. 1. Plus généralement que l'exemple d'Hultgren $\text{Bl}_{\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2}(\mathbb{P}^4)$ toutes les variétés $\text{Bl}_{\mathbb{P}^{k-1}, \mathbb{P}^k}(\mathbb{P}^{2k+1})$ pour k assez grand admettent des métriques Kähler-Einstein couplées mais pas de métriques Kähler-Einstein [Del22].

2. Il y a d'autres tels exemples : $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(-1, 2))$ en fait partie [DH21]

3. Je conjecture qu'il n'y a pas de métriques Kähler-Einstein couplées sur $\text{Bl}_{Q^k}(Q^n)$ pour $2 \leq k \leq n - 3$, mais je ne sais pas comment le démontrer pour toutes les décompositions possibles (cette variété a nombre de Picard égal à deux).

3.3.3 Éléments de preuve

Donnons quelques éléments de la preuve qui, comme illustré dans [Del23a], produisent des informations géométriques qu'on ne sait pour l'instant pas récupérer par la K-stabilité seule. Il faut en effet noter que, pour ce qui est du critère seul, la généralisation du résultat de Chen, Donaldson et Sun aux solitons à poids par Han et Li [HL23], et des raffinements de mes résultats de K-stabilité des variétés sphériques par Li, Li et Wang [LLW22] permettent de donner une autre preuve du critère de [DH21], et une généralisation aux variétés sphériques générales.

La preuve consiste à suivre une méthode de continuité, analogue à celle de Yau pour les métriques Kähler-Einstein. On considère la famille de systèmes d'équations :

$$\text{Ric}(\omega_{j,t}) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}g_j(\theta_{\omega_{j,t},\xi_j}) = t \sum_l \omega_{l,t} + (1-t) \sum_l \omega_{l,\text{ref}} + \delta \quad \forall j$$

Pour cette méthode de continuité, il faut adapter les arguments de Yau sur l'ouverture et les estimées d'ordre supérieures, pour obtenir

Théorème 3.3.10. [DH21] *Si on a des estimées C^0 a priori sur les potentiels (normalisés de manière adéquate) de $\omega_{l,s} - \omega_{l,\text{ref}}$ pour $s \in [0, t] \subset [0, 1]$, alors il existe des solutions pour tout $s \in [0, t]$.*

Dans cet énoncé, il n'est pas nécessaire de supposer X horosymétrique.

On utilise ensuite la formule pour la courbure des métriques hermitiennes sur les variétés horosymétriques pour traduire les équations en des équations de Monge-Ampère réelles sur \mathfrak{a}_s , invariantes sous l'action du groupe de Weyl restreint. Nous démontrons en fait des estimées C^0 a priori sur une famille plus générale de (chemins de) systèmes d'équations de Monge-Ampère réelles sur des cônes convexes polyédraux $C \subset \mathbb{R}^r$:

$$\det(d^2 u_{i,t}) G_i(du_{i,t}) = J \prod_{l=1}^k e^{-tu_{l,t} - (1-t)u_{l,\text{ref}}} \quad \text{sur } C \subset \mathbb{R}^r$$

où :

- les inconnues $u_{i,t}$ sont des fonctions convexes lisses sur \mathbb{R}^r telles que $\overline{\{d_x u_{i,t} \mid x \in C\}} = \Delta_i \subset (\mathbb{R}^r)^*$ sont des polytopes convexes fixés
- les G_i sont des fonctions continues sur Δ_i , lisses et strictement positives sur $\text{Int}(\Delta_i)$, $\int_{\Delta_i} G_i = 1$, et $G_i^{-\epsilon}$ est intégrable pour un $\epsilon > 0$
- la fonction J est continue, elle est strictement positive sur $\text{Int}(C)$, et s'annule sur ∂C
- $j := -\ln J$ est lisse et convexe sur $\text{Int}(C)$
- sa fonction de récession $j_\infty : \xi \in C \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} j(x + t\xi)/t$ satisfait quelques hypothèses techniques.

Soit alors Δ la somme de Minkowski de tous les Δ_i , et v_Δ la fonction support de Δ . Soit

$$\mathbf{Bar}_i = \int_{\Delta_i} p G_i(p) dp \in (\mathbb{R}^r)^*$$

On appelle condition (\dagger_t) la condition suivante :

$$\begin{aligned} (t \sum_i \mathbf{Bar}_i + (1-t)v_\Delta + j_\infty)(\xi) &\geq 0 \text{ pour } \xi \in C, \\ &= 0 \text{ ssi } t = 1, -\xi \in C, j_\infty(-\xi) = -j_\infty(\xi). \end{aligned}$$

Le point clef de la preuve est de démontrer :

Théorème 3.3.11. [DH21] *Soit $t_0 > 0$ et $t \in (t_0, 1]$.*

1. si (\dagger_t) est vraie, alors on a des estimées C^0 a priori sur $[t_0, t]$
2. si (\dagger_t) n'est pas vraie, alors il n'y a pas de solution lisse en t .

La preuve de ce résultat consiste en une généralisation *et* une simplification de l'approche que j'avais développée dans ma thèse [Del17a] en m'inspirant de [WZ04].

Illustrons pourquoi la condition (\dagger_t) est nécessaire sur un exemple où le rang r est égal à 1. En effet, un tel exemple contient déjà l'essentiel des arguments avec une présentation largement simplifiée. On considère l'équation sur \mathbb{R}

$$g(u'(t))u''(t) = \sinh(t)e^{-u(t)}$$

On suppose que u est paire, strictement convexe, et que $u(t) - a|t| = O(1)$. Alors on a en particulier $u'(\mathbb{R}) =]-a, a[$ et $u'(\mathbb{R}_+^*) =]0, a[$.

On multiplie l'équation par $u'(t)$, puis on intègre sur \mathbb{R}_+^* , puis on utilise le changement de variable $p = u'(t)$ (familier pour la dualité convexe). On obtient

$$\int_0^a pg(p)dp = \int_{\mathbb{R}_+^*} u'(t) \sinh(t) e^{-u(t)}$$

En écrivant $j(t) = -\ln \sinh(t)$, on a $\int_{\mathbb{R}_+^*} (j' + u')e^{-j-u} = 0$, et donc

$$\int_0^a pg(p)dp + \int_{\mathbb{R}_+^*} j'(t) \sinh(t) e^{-u(t)} = 0$$

Comme $j' < -1$ partout, on a

$$\int_0^a pg(p)dp - 1 < 0$$

Pour la preuve que la condition \dagger_t est suffisante, le raisonnement est bien plus complexe. Il s'agit plutôt ici de raisonner par l'absurde, et de démontrer que l'inégalité ci-dessus est violée en passant à la limite.

3.4 Limites de métriques canoniques

Peu avant les travaux de Chen, Donaldson et Sun qui ont mené à la résolution de la conjecture de Yau-Tian-Donaldson sur les variétés Fano, Chi Li et Song Sun avaient étudié les métriques Kähler-Einstein coniques dans un des cas les plus simples, (\mathbb{P}^2, tD) où D est une quadrique dans \mathbb{P}^2 . Ils avaient montré dans ce cas, dans [LS14], l'existence de métriques Kähler-Einstein sur \mathbb{P}^2 , avec des singularités coniques le long d'une quadrique D , pour des angles coniques $2\pi\beta$, avec $\beta \in]1/4, 1]$. De manière équivalente, il existe des métriques Kähler-Einstein singulières sur la paire $(\mathbb{P}^2, (1-\beta)D)$ pour $\beta \in]1/4, 1]$ (d'après [GP16]). Avec cet exemple, ils conjecturaient que ces métriques convergeaient, au sens de Gromov-Hausdorff vers l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(1, 1, 4)$, muni de sa métrique Kähler-Einstein au sens orbifold. Cette convergence est maintenant bien comprise grâce aux outils développés par Chen, Donaldson et Sun [CDS15b], mais avant cela Chi Li avait utilisé l'analyse numérique pour conforter leur conjecture dans [Li15]. Plus intéressant, il a observé numériquement que la bulle se formant lors de cette convergence est (le quotient par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de) la métrique Ricci plate d'Eguchi-Hanson. Dans l'article [Del23a], j'ai démontré ce phénomène de bulle de manière exacte (plutôt que numérique), et je l'ai étendu à toute une famille de paires, qui sont fournies par les variétés horosymétriques de rang un. Les bulles

métriques qui apparaissent sont, dans le cas d'une variété symétrique, les métriques Ricci plates de Stenzel sur les espaces symétriques de rang un [Ste93], et dans le cas horosymétrique général, ces métriques apparaissent sur chaque fibre de l'espace horosymétrique.

Le cadre est plus précisément le suivant. Soit G un groupe semisimple complexe, connexe. On considère une G -variété horosymétrique X de rang un, qui est toroidale, donc obtenue comme fibré G -homogène sur une variété projective homogène G/Q , de fibre l'unique compactification G_0 -équivariante de l'espace symétrique G_0/H_0 , de rang 1. Dans ce cas, X contient un unique diviseur premier G -stable D , qui est aussi l'unique orbite fermée de G . En fait, X consiste en seulement deux orbites de G , l'orbite ouverte G/H , et le diviseur D . Supposons que X est Kähler-Einstein, et soit $[0, b[\subsetneq [0, 1[$ l'ensemble des s tels que (X, sD) admet une métrique log Kähler-Einstein singulière dans $c_1(X)$. On note ω_s une telle métrique, qui est invariante sous un sous-groupe compact maximal K de G .

Théorème 3.4.1. [Del23a] *Quand s tend vers b , les métriques Kähler-Einstein coniques ω_s , restreintes à $X \setminus D$, convergent vers le tiré en arrière de la métrique Kähler-Einstein sur G/Q . De plus, restreintes à la fibre symétrique G_0/H_0 , et renormalisées, elles convergent vers la métrique Ricci plate de Stenzel.*

Remarquons que le diviseur D est un espace projectif homogène, et, ainsi, une variété Fano Kähler-Einstein. Cependant, le diviseur D n'est pas ample en général, ni un multiple de l'anticanonique. Ce type de situation a rarement été étudié plus tôt. L'exemple le plus simple où la structure de fibration est non-triviale (auquel cas le diviseur n'est ni ample, ni un multiple de l'anticanonique), est donné par $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ muni de l'action diagonale de SL_3 .

La preuve repose sur le formalisme horosymétrique décrit plus tôt, ainsi que sur les estimées obtenues pour prouver les estimées C^0 dans l'article [DH21] brièvement évoquées plus tôt également (et les variantes dans [BD19, Del17a, WZ04] notamment). Il faut ici étudier plus finement l'absence d'estimées C^0 dans ce cadre, pour en tirer des estimées sur la famille des potentiels toriques, ainsi qu'une renormalisation possible et des estimées sur cette famille renormalisée.

Bien entendu, le principe est très général, et peut s'appliquer à l'étude de limites de métriques canoniques qui ne soient pas des métriques Kähler-Einstein coniques, par exemple toutes celles étudiées dans [DH21]. On peut donc appliquer la même méthode pour montrer que les métriques de Stenzel (fibre à fibre) apparaissent comme bulles lors de la formation de singularités le long de diverses méthodes de continuité ou flots. Par exemple, le long du flot de Kähler-Ricci normalisé, ou de la méthode de continuité de Yau pour l'existence de métriques Kähler-Einstein. De plus, ces méthodes s'appliquent tout aussi bien dans le cas de variétés horosymétriques de rang un, y compris singulières, qui ne sont pas globalement des fibrations. Parmi celles-ci, on avait exhibé des exemples sans métriques Kähler-Einstein dans [BD19].

3.5 Métriques CY à cône asymptotique singuliers

3.5.1 Introduction

Le résultat précédent [Del23a] montre que les métriques Ricci plates apparaissent de manière naturelle lors de l'étude de (familles de) métriques Kählériennes canoniques sur des variétés Kählériennes compactes. Mieux : certaines de ces métriques sont canoniques, par exemple sur le complémentaire d'un diviseur, si elles apparaissent comme l'unique limite d'une suite de métriques canoniques (les métriques Kähler-Einstein coniques, avec l'angle

qui varie). De plus, de telles métriques peuvent être utilisées comme ingrédients dans des constructions par recollements.

Les espaces symétriques complexes sont susceptibles d'admettre de telles métriques, et il y a en fait une longue histoire de résultats d'existence dans cette direction. On a déjà mentionné la métrique d'Eguchi-Hanson [EH79], et les métriques de Stenzel [Ste93], qui donnent essentiellement toutes les métriques Ricci plates sur les espaces symétriques complexes de rang 1. En rang supérieur, Biquard et Gauduchon ont construit des métriques hyperkähleriennes (donc Ricci plates) explicites sur les espaces symétriques complexes hermitien [BG96], et Bielawski des métriques Ricci plates sur tous les espaces symétriques complexes [Bie04] (avec une faille dans la preuve comblée récemment par Koike [Koi23]). Si le second résultat semble plus général, la construction dit en fait très peu de la géométrie des métriques construites, alors que, dans la construction de Biquard et Gauduchon, la géométrie est très explicite, et les métriques sont asymptotiquement coniques avec un cône singulier.

En dehors des espaces symétriques, Tian et Yau ont développé dans [TY90, TY91] une méthode générale pour obtenir des métriques Ricci plates sur des variétés complexes non-compactes, asymptotiquement coniques avec des cônes asymptotiques lisses (en dehors du sommet). La méthode consiste à considérer le complémentaire d'un diviseur D dans une variété X , en supposant que D est un multiple de l'anticanonique, et que D admet une métrique Kähler-Einstein. Par l'ansatz de Calabi, on en tire une métrique Ricci plate sur le cône au-dessus de D , et Tian et Yau construisent à partir de ça une solution asymptotique à l'équation Ricci plate sur $X \setminus D$. La construction de Tian et Yau a été précisée et raffinée, notamment dans les travaux de Conlon et Hein [CH13, CH15]. Récemment, de nouvelles métriques Ricci plates asymptotiquement coniques ont été construites par divers auteurs, avec maintenant un cône singulier [CDR19, Li19, Szé19], en particulier sur \mathbb{C}^n pour $n > 2$. Avec Olivier Biquard, nous avons construit de telles métriques sur de nombreux espaces symétriques de rang deux.

3.5.2 Cônes asymptotiques horosymétriques

En suivant la philosophie de Tian-Yau, nous avons considéré les espaces symétriques *de rang deux* comme complémentaires de *deux* diviseurs dans une compactification naturelle, la compactification magnifique (au moins pour un espace symétrique adjoint). Notons G/H l'espace symétrique, et X sa compactification magnifique. Le diviseur à l'infini $X \setminus G/H$ est alors un diviseur à croisements normaux simples, avec deux composantes irréductibles D_1 et D_2 , qui est le support d'un diviseur anticanonique de X (on remarque que cette variété n'est pas nécessairement Fano [Ruz12]). Chacune des deux composantes D_i est une variété horosymétrique de rang 1, dont la fibre symétrique est un espace symétrique de rang 1. Nous avons cherché des métriques asymptotiquement coniques avec pour cône asymptotique un cône sur une variété singulière \check{D}_2 , obtenue par contraction de l'orbite fermée de D_2 . Lorsque cette variété est Kähler-Einstein, et donc fournit une métrique Ricci plate singulière sur le cône, nous construisons un ansatz pour désingulariser ce cône, en utilisant l'autre diviseur D_1 , et notamment les métriques de Stenzel sur les fibres de son orbite ouverte. Cette approche est justifiée par, et a pour origine l'analyse des exemples de Biquard et Gauduchon, dans le formalisme que j'ai développé, et présenté plus tôt, pour la géométrie Kählérienne des variétés horosymétriques dans [Del20b]. Il n'y a pas, en général, de choix canonique pour la numérotation de D_1 et D_2 . Mieux, les deux choix fournissent des métriques différentes qui sont toutes deux asymptotiquement Ricci plates, sauf pour certains exemples exceptionnels où l'un des diviseurs n'admet aucune métrique Kähler-Einstein.

Théorème 3.5.1. [BD19] *Il existe une métrique Ricci plate avec un cône asymptotique horosymétrique sur les espace symétriques complexes indécomposables suivants :*

— *pour un choix de numérotation, les espaces symétriques non-hermitiens :*

$$\mathrm{Sp}_8 / (\mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_4), \quad \mathrm{G}_2 / \mathrm{SO}_4, \quad \mathrm{G}_2 \times \mathrm{G}_2 / \mathrm{G}_2, \quad \mathrm{SO}_5 \times \mathrm{SO}_5 / \mathrm{SO}_5,$$

— *sur chaque espace symétrique hermitien, pour un choix de numérotation une métrique Ricci plate correspondant à celle de Biquard et Gauduchon,*

— *de plus, sur les espaces symétriques hermitien suivants, l'autre choix de numérotation produit une autre métrique Ricci plate, avec un cône asymptotique différent :*

$$\mathrm{SO}_n / \mathrm{S}(\mathrm{O}_2 \times \mathrm{O}_{n-2}) \text{ for } n \geq 5, \quad \mathrm{SL}_5 / \mathrm{S}(\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3).$$

Il reste un certain nombre d'espaces symétriques de rang deux non couverts par le théorème, y compris l'espace symétrique le plus simple $\mathrm{SL}_3 / \mathrm{SO}_3$. Ceci s'explique par la géométrie à l'infini de l'ansatz que nous construisons. En effet, dans tous les cas où D_2 admet une métrique Kähler-Einstein, nous produisons une solution asymptotique à l'équation Ricci plate. Ceci ne suffit pas à produire une vraie solution quand la géométrie à l'infini est trop dégénérée (courbure bisectionnelle holomorphe non bornée), de sorte que les méthodes d'estimées connues ne s'appliquent pas.

3.5.3 Thèse de Tran Trung Nghiem : cône horosphérique

Je co-encadre depuis 2021 la thèse de Tran Trung Nghiem, avec Marc Herzlich. Ses travaux de thèse portent sur les métriques de Calabi-Yau asymptotiquement coniques, notamment leur construction sur les espaces symétriques. Pour résoudre les défauts de l'approche de [BD19], Nghiem cherche à construire des métriques Calabi-Yau dont le cône asymptotique est horosphérique, ce qui n'est pas le cas dans [BD19]. Dans un travail préliminaire, Nghiem a donné une caractérisation combinatoire complète de l'existence de métriques Calabi-Yau radiales sur les cônes horosphériques, ce qui donne les cônes asymptotiques possibles dans un cadre très général [Ngh23b]. Pour démontrer ce résultat, il a adopté une approche via la géométrie convexe, reposant sur la géométrie des variétés horosphériques comme cas particuliers de variétés horosymétriques. Il a aussi montré un résultat général d'intérêt indépendant [Ngh23a] sur la régularité des métriques Calabi-Yau radiales au sens faible sur les cônes Fano, qui généralise des résultats de régularité pour le cas compact [BBE⁺19].

Il est maintenant sur le point de donner une généralisation très forte de l'approche de [BD19], qui permet de montrer l'existence de métriques Calabi-Yau avec un cône asymptotique horosphérique sur tous les espaces symétriques de rang deux (sauf deux exceptions). De plus, le résultat produit une diversité de comportements remarquable, et suggère d'autres développements. Les cônes asymptotiques sont généralement singuliers (en dehors du sommet), donc Nghiem propose une nouvelle construction de telles métriques, qui comme on l'a dit plus tôt on fait l'objet de recherches très actives ces dernières années. Les exemples construits semblent se présenter sous formes de familles à deux paramètres (dont l'un est simplement une mise à l'échelle). De plus, Nghiem construit de nombreux exemples où le cône asymptotique Calabi-Yau a un vecteur de Reeb irrégulier. Dans le cas lisse, des exemples explicites de tels comportements sont notablement rares. Tous les exemples obtenus par Nghiem sont particulièrement intéressants pour faire un pont entre les résultats très forts connus dans le cas d'un cône lisse dûs à Conlon, Hein [CH13, CH15], Sun, Zhang [SZ23] etc et les nouvelles constructions avec cône singulier. Nghiem travaille également à l'interprétation algèbro-géométrique des différents phénomènes et conditions observés.

3.6 D'autres projets de recherche

3.6.1 Bulles

Une grande partie du travail effectué dans [Del23a] pour les variétés horosymétriques de rang un peut se généraliser aux rangs supérieurs. Dans ce cadre, on s'attend à trouver un lien entre les métriques construites dans [BD19] et les limites de métriques Kähler-Einstein coniques sur des variétés symétriques de rang deux. Tout progrès dans cette direction serait bon à prendre, et il reste de nombreux points à éclaircir, qui pourraient aussi laisser espérer une construction possible dans le cas général (non horosymétrique, sans symétries). Henri Guenancia et Olivier Biquard ont largement compris cette question pour les métriques Kähler-Einstein coniques à courbure négative ou nulle [BG22], mais le cas de courbure positive est sensiblement différent.

Par exemple, pourrait-on, par cette stratégie, démontrer l'existence des métriques Ricci plates correspondantes aux solutions asymptotiques que nous avons construites dans [BD19], mais dont la géométrie est trop dégénérée pour appliquer le Théorème de Tian-Yau-Hein? Comment se traduit le fait qu'il n'existe pas de métriques Ricci plates asymptotiquement coniques dans certains cas, comme pour un des choix de diviseurs pour les espaces symétriques de type G_2 ? Peut-on reconstruire les solutions en temps long du flot de Kähler-Ricci normalisé sur une variété Fano par recollements à partir d'une métrique Ricci plate asymptotiquement conique, et du soliton de Kähler-Ricci sur la limite de Gromov-Hausdorff du flot?

La compréhension analytique de ces phénomènes pourrait avoir un intérêt également dans l'étude des phénomènes de *wall-crossing* pour les espaces de K-modules des paires Fano, pour lesquels on dispose maintenant de nombreux exemples explicites, par exemple [ADL23]. Mentionnons à ce sujet que, maintenant que les espaces de K-modules sont de mieux en mieux compris, Chenyang Xu estime qu'une prochaine étape est de considérer les espaces de modules de solitons de Kähler-Ricci, pour pouvoir aussi considérer les variétés Fano qui ne sont pas K-stables. Je suggérerais même de le faire pour tous les solitons à poids, voire les solitons à poids couplés, et je ne désespère pas de trouver une notion de métrique canonique adaptée aux exemples sans solitons de Kähler-Ricci que j'ai construit.

3.6.2 Dégénérescences

L'étude des dégénérescences d'autres familles de métriques canoniques, ou le long de flots géométriques, fait également partie des choses que j'aimerais explorer en utilisant les exemples des variétés horosymétriques. Plusieurs auteurs ont déjà considéré le flot de Kähler-Ricci normalisé sur des variétés horosymétriques Fano (par exemple [TZ22]), pour préciser des résultats généraux de Chen Sun Wang [CSW18], et l'observation de Székelyhidi rapportée dans [Del17a] que les exemples de variétés sans solitons de Kähler-Ricci construits dans ma thèse fournissent des exemples de variétés Fano où le flot de Kähler-Ricci développe des singularités de type II.

Bilal Maoui, que j'ai encadré en stage de Master 2 en 2023, a commencé une thèse que je co-encadre avec Eleonora Di Nezza, autour du programme de Song-Tian [ST12] qui vise à apporter une approche analytique au programme du modèle minimal via le flot de Kähler-Ricci (non-normalisé). Je pense que l'exploration d'exemples parmi les variétés horosymétriques serait instructif, et que, dans le cas du rang un, on peut facilement envisager l'étude du flot sur des variétés singulières. Même le cas des variétés horosphériques de rang un mérite qu'on s'y attarde, et on peut compter sur une description combinatoire du programme

du modèle minimal (algébrique) par Pasquier pour guider l'exploration [Pas15]. Dans son stage, Bilal a revisité le cas des espaces homogènes projectifs étudié récemment par Correa [Cor23] ainsi que le cas des fibrés en espaces projectifs étudié par Song, Székelyhidi et Weinkove [SSW13]. Il est donc bien équipé pour étudier les variétés horosphériques.

Dans une autre direction, il semble naturel d'espérer que les progrès obtenus depuis [CC21] permettent d'en dire plus sur le flot de Calabi, étudié par exemple par Székelyhidi dans [Szé09] et décrit de manière conjecturale pour les variétés toriques par Donaldson dans [Don09]. Étudier en détail le cas des variétés horosymétriques de rang un semble aussi un problème attractif et réalisable, qui pourrait donner des indications sur le cas général. J'aimerais, pour faire mieux, développer un ansatz de Calabi non abélien qui serait modelé sur les variétés horosymétriques de rang un, mais qui permettrait de traiter des variétés plus générales, avec peu (voire pas) d'automorphismes globaux.

Bibliographie

- [AB03] Hassan Azad and Indranil Biswas. Quasi-potentials and Kähler-Einstein metrics on flag manifolds. II. *J. Algebra*, 269(2) :480–491, 2003.
- [Abr98] Miguel Abreu. Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics. *Int. J. Math.*, 9(6) :641–651, 1998.
- [ACC⁺23] Carolina Araujo, Ana-Maria Castravet, Ivan Cheltsov, Kento Fujita, Anne-Sophie Kaloghiros, Jesus Martinez-Garcia, Constantin Shramov, Hendrik Süß, and Nivedita Viswanathan. *The Calabi problem for Fano threefolds*, volume 485 of *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* Cambridge : Cambridge University Press, 2023.
- [ACGTF04] Vestislav Apostolov, David M. J. Calderbank, Paul Gauduchon, and Christina W. Tønnesen-Friedman. Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. II : Global classification. *J. Differ. Geom.*, 68(2) :277–345, 2004.
- [ADL23] Kenneth Ascher, Kristin DeVleming, and Yuchen Liu. K-stability and birational models of moduli of quartic K3 surfaces. *Invent. Math.*, 232(2) :471–552, 2023.
- [AJL22] Vestislav Apostolov, Simon Jubert, and Abdellah Lahdili. Weighted K-stability and coercivity with applications to extremal Kahler and Sasaki metrics, 2022. <https://arxiv.org/abs/2104.09709>.
- [AK05] Valery Alexeev and Ludmil Katzarkov. On K-stability of reductive varieties. *Geom. Funct. Anal.*, 15(2) :297–310, 2005.
- [Akh83] Dmitri N. Akhiezer. Equivariant completions of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors. *Ann. Global Anal. Geom.*, 1(1) :49–78, 1983.
- [AL92] Hassan Azad and Jean-Jacques Loeb. Plurisubharmonic functions and Kählerian metrics on complexification of symmetric spaces. *Indag. Math., New Ser.*, 3(4) :365–375, 1992.
- [AZ22] Hamid Abban and Ziquan Zhuang. K-stability of Fano varieties via admissible flags. *Forum Math. Pi*, 10 :43, 2022. Id/No e15.
- [Bat99] V. V. Batyrev. On the classification of toric Fano 4-folds. *J. Math. Sci. (New York)*, 94(1) :1021–1050, 1999. Algebraic geometry, 9.
- [BBE⁺19] Robert J. Berman, Sébastien Boucksom, Philippe Eyssidieux, Vincent Guedj, and Ahmed Zeriahi. Kähler-Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log Fano varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 751 :27–89, 2019.
- [BD19] Olivier Biquard and Thibaut Delcroix. Ricci flat Kähler metrics on rank two complex symmetric spaces. *J. Éc. polytech. Math.*, 6 :163–201, 2019.

- [BG96] Olivier Biquard and Paul Gauduchon. La métrique hyperkählérienne des orbites coadjointes de type symétrique d'un groupe de Lie complexe semi-simple. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(12) :1259–1264, 1996.
- [BG22] Olivier Biquard and Henri Guenancia. Degenerating Kähler-Einstein cones, locally symmetric cusps, and the Tian-Yau metric. *Invent. Math.*, 230(3) :1101–1163, 2022.
- [BHJ17] Sébastien Boucksom, Tomoyuki Hisamoto, and Mattias Jonsson. Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 67(2) :743–841, 2017.
- [Bie04] Roger Bielawski. Prescribing Ricci curvature on complexified symmetric spaces. *Math. Res. Lett.*, 11(4) :435–441, 2004.
- [BLV86] Michel Brion, Dominique Luna, and Thierry Vust. Espaces homogènes sphériques. (Spherical homogeneous spaces). *Invent. Math.*, 84 :617–632, 1986.
- [BM87] Shigetoshi Bando and Toshiki Mabuchi. Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions. Algebraic geometry, Proc. Symp., Sendai/Jap. 1985, Adv. Stud. Pure Math. 10, 11-40 (1987)., 1987.
- [BM20] Victor Batyrev and Anne Moreau. Satellites of spherical subgroups. *Algebr. Geom.*, 7(1) :86–112, 2020.
- [Bri89] Michel Brion. Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. *Duke Math. J.*, 58(2) :397–424, 1989.
- [Bri90] Michel Brion. Vers une généralisation des espaces symétriques. *J. Algebra*, 134(1) :115–143, 1990.
- [Bri93] Michel Brion. Spherical varieties and Mori theory. *Duke Math. J.*, 72(2) :369–404, 1993.
- [Bri97] Michel Brion. Curves and divisors in spherical varieties. In *Algebraic groups and Lie groups*, volume 9 of *Austral. Math. Soc. Lect. Ser.*, pages 21–34. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [Cal82] Eugenio Calabi. Extremal Kähler metrics. In *Seminar on Differential Geometry*, volume 102 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 259–290. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.
- [CC21] Xiuxiong Chen and Jingrui Cheng. On the constant scalar curvature Kähler metrics. II : Existence results. *J. Am. Math. Soc.*, 34(4) :937–1009, 2021.
- [CDR19] Ronan J. Conlon, Anda Degeratu, and Frédéric Rochon. Quasi-asymptotically conical Calabi-Yau manifolds. *Geom. Topol.*, 23(1) :29–100, 2019.
- [CDS15a] Xiuxiong Chen, Simon K. Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I : Approximation of metrics with cone singularities. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1) :183–197, 2015.
- [CDS15b] Xiuxiong Chen, Simon K. Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II : Limits with cone angle less than 2π . *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1) :199–234, 2015.
- [CDS15c] Xiuxiong Chen, Simon K. Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III : Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1) :235–278, 2015.
- [CH13] Ronan J. Conlon and Hans-Joachim Hein. Asymptotically conical Calabi-Yau manifolds. I. *Duke Math. J.*, 162(15) :2855–2902, 2013.

- [CH15] Ronan J. Conlon and Hans-Joachim Hein. Asymptotically conical Calabi-Yau metrics on quasi-projective varieties. *Geom. Funct. Anal.*, 25(2) :517–552, 2015.
- [Cor23] Eder M. Correa. Kähler-Ricci flow on rational homogeneous varieties. *J. Algebra*, 629 :38–75, 2023.
- [CS22] Ivan Cheltsov and Arman Sarikyan. Equivariant pliability of the projective space, 2022. <https://arxiv.org/abs/2202.09319>.
- [CSW18] Xiuxiong Chen, Song Sun, and Bing Wang. Kähler-Ricci flow, Kähler-Einstein metric, and K-stability. *Geom. Topol.*, 22(6) :3145–3173, 2018.
- [Del14] Thibaut Delcroix. The Burger-Mozes groups are not Kähler. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*, 23(1) :115–127, 2014.
- [Del15] Thibaut Delcroix. Alpha-invariant of toric line bundles. *Ann. Pol. Math.*, 114(1) :13–27, 2015.
- [Del17a] Thibaut Delcroix. Kähler-Einstein metrics on group compactifications. *Geom. Funct. Anal.*, 27(1) :78–129, 2017.
- [Del17b] Thibaut Delcroix. Log canonical thresholds on group compactifications. *Algebr. Geom.*, 4(2) :203–220, 2017.
- [Del20a] Thibaut Delcroix. K-stability of Fano spherical varieties. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 3(53) :615–662, 2020.
- [Del20b] Thibaut Delcroix. Kähler geometry of horosymmetric varieties, and application to Mabuchi’s K-energy functional. *J. Reine Angew. Math.*, 763 :129–199, 2020.
- [Del22] Thibaut Delcroix. Examples of K-unstable Fano manifolds. *Ann. Inst. Fourier*, 72(5) :2079–2108, 2022.
- [Del23a] Thibaut Delcroix. Limits of conical Kähler-Einstein metrics on rank one horosymmetric spaces, 2023. <https://arxiv.org/abs/2310.04062>.
- [Del23b] Thibaut Delcroix. The Yau–Tian–Donaldson Conjecture for Cohomogeneity One Manifolds. In Ivan Cheltsov, Xiuxiong Chen, Ludmil Katzarkov, and Jihun Park, editors, *Birational Geometry, Kähler–Einstein Metrics and Degenerations*, pages 205–223, Cham, 2023. Springer International Publishing.
- [Del23c] Thibaut Delcroix. Uniform K-stability of polarized spherical varieties. *Épjournal de Géom. Algèbr., EPIGA*, 7 :27, 2023. Id/No 9.
- [Der16] Ruadháí Dervan. Uniform stability of twisted constant scalar curvature Kähler metrics. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 15 :4728–4783, 2016.
- [DH21] Thibaut Delcroix and Jakob Hultgren. Coupled complex Monge-Ampère equations on Fano horosymmetric manifolds. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 153 :281–315, 2021.
- [DJ23] Thibaut Delcroix and Simon Jubert. An effective weighted K-stability condition for polytopes and semisimple principal toric fibrations. *Ann. Henri Lebesgue*, 6 :117–149, 2023.
- [DM23] Thibaut Delcroix and Pierre-Louis Montagard. Spherical actions on locally factorial Fano varieties of dimension ≤ 4 and rank ≤ 2 , 2023. <https://arxiv.org/abs/2308.15858>.
- [Don02] Simon K. Donaldson. Scalar curvature and stability of toric varieties. *J. Differential Geom.*, 62(2) :289–349, 2002.

- [Don09] Simon K. Donaldson. Constant scalar curvature metrics on toric surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 19(1) :83–136, 2009.
- [DP83] Corrado De Concini and Claudio Procesi. Complete symmetric varieties. In *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, volume 996 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–44. Springer, Berlin, 1983.
- [DR16a] Andrew Douglas and Joe Repka. The subalgebras of A_2 . *J. Pure Appl. Algebra*, 220(6) :2389–2413, 2016.
- [DR16b] Andrew Douglas and Joe Repka. The subalgebras of $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$. *Commun. Algebra*, 44(12) :5269–5286, 2016.
- [DS16] Ved Datar and Gábor Székelyhidi. Kähler-Einstein metrics along the smooth continuity method. *Geom. Funct. Anal.*, 26(4) :975–1010, 2016.
- [DS21] Ruadhaí Dervan and Lars Martin Sektnan. Optimal symplectic connections on holomorphic submersions. *Commun. Pure Appl. Math.*, 74(10) :2132–2184, 2021.
- [DT92] Weiyue Ding and Gang Tian. Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant. *Invent. Math.*, 110(2) :315–335, 1992.
- [EH79] Tohru Eguchi and Andrew J Hanson. Self-dual solutions to euclidean gravity. *Annals of Physics*, 120(1) :82–106, 1979.
- [Fan21] Hanlong Fang. Canonical blow-ups of Grassmann manifolds, 2021. <https://arxiv.org/abs/2007.06200>.
- [FP22] Enrica Floris and Boris Pasquier. A description of the Sarkisov program of horospherical varieties via moment polytopes, 2022. <https://arxiv.org/abs/2212.10304>.
- [Fuj17] Kento Fujita. Examples of K-Unstable Fano Manifolds with the Picard Number 1. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, page 1–11, 2017.
- [Fut83] Akito Futaki. An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics. *Invent. Math.*, 73(3) :437–443, 1983.
- [GC00] Daniel Guan and Xiuxiong Chen. Existence of extremal metrics on almost homogeneous manifolds of cohomogeneity one. *Asian J. Math.*, 4(4) :817–830, 2000.
- [GH15a] Giuliano Gagliardi and Johannes Hofscheier. Gorenstein spherical Fano varieties. *Geom. Dedicata*, 178 :111–133, 2015.
- [GH15b] Giuliano Gagliardi and Johannes Hofscheier. Homogeneous spherical data of orbits in spherical embeddings. *Transform. Groups*, 20(1) :83–98, 2015.
- [Gol20] Aleksei Golota. Delta-invariants for Fano varieties with large automorphism groups. *Int. J. Math.*, 31(10) :31, 2020. Id/No 2050077.
- [GP16] Henri Guenancia and Mihai Paun. Conic singularities metrics with prescribed Ricci curvature : general cone angles along normal crossing divisors. *J. Differ. Geom.*, 103(1) :15–57, 2016.
- [Gua06] Daniel Guan. Existence of extremal metrics on almost homogeneous manifolds of cohomogeneity one. IV. *Ann. Global Anal. Geom.*, 30(2) :139–167, 2006.
- [Hei10] Hans-Joachim Hein. *On gravitational instantons*. PhD thesis, Princeton University, 2010.
- [His20] Tomoyuki Hisamoto. Stability and coercivity for toric polarizations. <https://arxiv.org/abs/1610.07998v3>, 2020.

- [HL23] Jiyuan Han and Chi Li. On the Yau-Tian-Donaldson conjecture for generalized Kähler-Ricci Soliton equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 76(9) :1793–1867, 2023.
- [Hul19] Jakob Hultgren. Coupled Kähler-Ricci solitons on toric Fano manifolds. *Anal. PDE*, 12(8) :2067–2094, 2019.
- [Hwa94] Andrew D. Hwang. On existence of Kähler metrics with constant scalar curvature. *Osaka J. Math.*, 31(3) :561–595, 1994.
- [HWN19] Jakob Hultgren and D. Witt Nyström. Coupled Kähler-Einstein metrics. *Int. Math. Res. Not.*, 2019(21) :6765–6796, 2019.
- [Isk77] V. A. Iskovskih. Fano threefolds. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 41(3) :516–562, 717, 1977.
- [Isk78] V. A. Iskovskih. Fano threefolds. II. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 42(3) :506–549, 1978.
- [Jub23] Simon Jubert. A Yau-Tian-Donaldson correspondence on a class of toric fibrations. *Ann. Inst. Fourier*, 73(6) :2567–2604, 2023.
- [Käh32] Erich Kähler. Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 9 :173–186, 1932.
- [Kan21] Akihiro Kanemitsu. Fano manifolds and stability of tangent bundles. *J. Reine Angew. Math.*, 774 :163–183, 2021.
- [Kno91] Friedrich Knop. The Luna-Vust theory of spherical embeddings. In *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, pages 225–249. Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [Kod54] Kunihiko Kodaira. On Kähler varieties of restricted type. (An intrinsic characterization of algebraic varieties.). *Ann. Math. (2)*, 60 :28–48, 1954.
- [Koi23] Naoyuki Koike. Calabi-Yau structures on the complexifications of rank two symmetric spaces, 2023. <https://arxiv.org/abs/2309.17418>.
- [Li15] Chi Li. Numerical solutions of Kähler-Einstein metrics on \mathbb{P}^2 with conical singularities along a smooth quadric curve. *J. Geom. Anal.*, 25(3) :1773–1797, 2015.
- [Li19] Yang Li. A new complete Calabi-Yau metric on \mathbb{C}^3 . *Invent. Math.*, 217(1) :1–34, 2019.
- [Li22] Chi Li. Geodesic rays and stability in the lowercase cscK problem. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 55(6) :1529–1574, 2022.
- [LLW22] Yan Li, ZhenYe Li, and Feng Wang. Weighted K-stability of \mathbb{Q} -Fano spherical varieties. *arXiv e-print 2208.02708*, August 2022. <https://arxiv.org/abs/2208.02708>.
- [Los09] Ivan V. Losev. Uniqueness property for spherical homogeneous spaces. *Duke Math. J.*, 147(2) :315–343, 2009.
- [LPY22] Jae-Hyoun Lee, Kyeong-Dong Park, and Sungmin Yoo. K-stability of Gorenstein Fano group compactifications with rank two. *Int. J. Math.*, 33(13) :42, 2022. Id/No 2250083.
- [LS14] Chi Li and Song Sun. Conical Kähler-Einstein metrics revisited. *Commun. Math. Phys.*, 331(3) :927–973, 2014.
- [LX14] Chi Li and Chenyang Xu. Special test configuration and K-stability of Fano varieties. *Ann. Math. (2)*, 180(1) :197–232, 2014.

- [LZZ18] Yan Li, Bin Zhou, and Xiaohua Zhu. K-energy on polarized compactifications of Lie groups. *J. Funct. Anal.*, 275(5) :1023–1072, 2018.
- [Mab03] Toshiki Mabuchi. Multiplier Hermitian structures on Kähler manifolds. *Nagoya Math. J.*, 170 :73–115, 2003.
- [Mai00] Vincent Maillot. Géométrie d’Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. (Arakelov geometry of toric varieties and integrable line bundles). *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.*, 80 :129, 2000.
- [Mat57] Y. Matsushima. Sur la structure du groupe d’homéomorphismes analytiques d’une certaine variété kählérienne. *Nagoya Math. J.*, 11 :145–150, 1957.
- [MM03] Shigefumi Mori and Shigeru Mukai. Erratum : “Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ ” [Manuscripta Math. 36 (1981/82), no. 2, 147–162; MR0641971 (83f :14032)]. *Manuscripta Math.*, 110(3) :407, 2003.
- [MM82] Shigefumi Mori and Shigeru Mukai. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. *Manuscripta Math.*, 36(2) :147–162, 1981/82.
- [Ngh23a] Tran-Trung Nghiem. On the regularity of conical Calabi-Yau potentials, 2023. <https://arxiv.org/abs/2210.09189>.
- [Ngh23b] Tran-Trung Nghiem. Spherical cones : classification and a volume minimization principle. *J. Geom. Anal.*, 33(7) :46, 2023. Id/No 221.
- [Nyb] Thomas Nyberg. Constant Scalar Curvature of Toric Fibrations. PhD thesis, Columbia University.
- [OO13] Yuji Odaka and Takuzo Okada. Birational superrigidity and slope stability of Fano manifolds. *Math. Z.*, 275(3-4) :1109–1119, 2013.
- [Pas09] Boris Pasquier. On some smooth projective two-orbit varieties with Picard number 1. *Math. Ann.*, 344(4) :963–987, 2009.
- [Pas15] Boris Pasquier. An approach of the minimal model program for horospherical varieties via moment polytopes. *J. Reine Angew. Math.*, 708 :173–212, 2015.
- [PCS19] V. V. Przyjalkowski, I. A. Cheltsov, and K. A. Shramov. Fano threefolds with infinite automorphism groups. *Izv. Math.*, 83(4) :860–907, 2019.
- [PK92] A. V. Pukhlikov and A. G. Khovanskij. Finitely additive measures of virtual polytopes. *Algebra Anal.*, 4(2) :161–185, 1992.
- [PP10] Boris Pasquier and Nicolas Perrin. Local rigidity of quasi-regular varieties. *Math. Z.*, 265(3) :589–600, 2010.
- [Ruz12] Alessandro Ruzzi. Fano symmetric varieties with low rank. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 48(2) :235–278, 2012.
- [Sat00] Hiroshi Sato. Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties. *Tohoku Math. J. (2)*, 52(3) :383–413, 2000.
- [SSW13] Jian Song, Gábor Székelyhidi, and Ben Weinkove. The Kähler-Ricci flow on projective bundles. *Int. Math. Res. Not.*, 2013(2) :243–257, 2013.
- [ST12] Jian Song and Gang Tian. Canonical measures and Kähler-Ricci flow. *J. Am. Math. Soc.*, 25(2) :303–353, 2012.
- [Ste93] Matthew B. Stenzel. Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space. *Manuscripta Math.*, 80(2) :151–163, 1993.
- [SZ23] Song Sun and Junsheng Zhang. No semistability at infinity for Calabi-Yau metrics asymptotic to cones. *Invent. Math.*, 233(1) :461–494, 2023.

- [Szé07] Gábor Székelyhidi. Extremal metrics and K -stability. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39(1) :76–84, 2007.
- [Szé09] Gábor Székelyhidi. The Calabi functional on a ruled surface. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(5) :837–856, 2009.
- [Szé15] Gábor Székelyhidi. Filtrations and test-configurations. *Math. Ann.*, 362(1-2) :451–484, 2015. With an appendix by Sebastien Boucksom.
- [Szé19] Gábor Székelyhidi. Degenerations of \mathbf{C}^n and Calabi-Yau metrics. *Duke Math. J.*, 168(14) :2651–2700, 2019.
- [Tia97] Gang Tian. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. *Invent. Math.*, 130(1) :1–37, 1997.
- [TY90] Gang Tian and Shing-Tung Yau. Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(3) :579–609, 1990.
- [TY91] Gang Tian and Shing Tung Yau. Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II. *Invent. Math.*, 106(1) :27–60, 1991.
- [TZ22] Gang Tian and Xiaohua Zhu. Horosymmetric limits of Kähler-Ricci flow on Fano G -manifolds. *arXiv e-print 2209.05029*, September 2022. <https://arxiv.org/abs/2209.05029>.
- [Was96] B. Wasserman. Wonderful varieties of rank two. *Transform. Groups*, 1(4) :375–403, 1996.
- [WZ04] Xu-Jia Wang and Xiaohua Zhu. Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class. *Adv. Math.*, 188(1) :87–103, 2004.
- [Yau78] Shing-Tung Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Commun. Pure Appl. Math.*, 31 :339–411, 1978.
- [ZZ08] Bin Zhou and Xiaohua Zhu. Relative K -stability and modified K -energy on toric manifolds. *Adv. Math.*, 219(4) :1327–1362, 2008.
- [Øb07] Mikkel Øbro. An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes, 2007. <https://arxiv.org/abs/0704.0049>.