Ulysse – Géométrie torique : lissité et résolution des singularités

Rappels : $N \cong \mathbb{Z}^n$, $N_\mathbb{R} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$

$T_N = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[N^\vee])$, $T_N(R) = \mathrm{Hom}_{gp}(N^\vee, R^\times)$

$\sigma \subset N_\mathbb{R}$ un cône (polyédral rationnel + fortement convexe)

$\rightsquigarrow S_\sigma \subseteq N^\vee$ l'ensemble des formes linéaires ≥ 0 sur σ

$U_\sigma := \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\sigma]$, $U_\sigma(R) = \mathrm{Hom}(S_\sigma, R)$ (monoïde)

Δ un éventail $\rightsquigarrow X(\Delta) = \operatorname{colim}_{\sigma \in \Delta} U_\sigma$ (recollement).

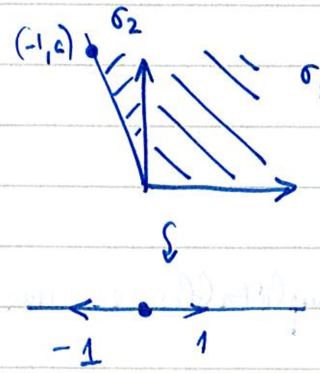
• Pour un morphisme de groupes $f : N' \to N$, on a $f : T_{N'} \to T_N$

Pour Δ', Δ des éventails, si $\forall \sigma' \in \Delta', \exists \sigma \in \Delta, f(\sigma') \subset \sigma$, alors

f induit
$$\begin{array}{ccc} X(\Delta') & \longrightarrow & X(\Delta) \\ \cup & & \cup \\ T_{N'} & \longrightarrow & T_N \end{array}$$

[C'est même intéressant pour $f = id_T$.]

Exemple : $N' \simeq \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{pr_1} N \simeq \mathbb{Z}$



$$\begin{array}{c} X(\Delta') \\ \downarrow \\ X(\Delta) = \mathbb{P}^1 \end{array}$$

$X(\Delta') = \,?$ $\quad U_{\sigma_1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]$, $U_{\sigma_2} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x^{-1}, x^a y]$

On reconnaît
$$\begin{array}{ccc} X(\Delta') & = & \mathcal{O}(-a). \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\Delta) & = & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- Points distingués :

σ cône $\rightsquigarrow x_\sigma \in U_\sigma(\mathbb{C}) \simeq \operatorname{Hom}(S_\sigma, \mathbb{C})$
$$\cup$$
$$\operatorname{Hom}(S_\sigma, \{0,1\})$$

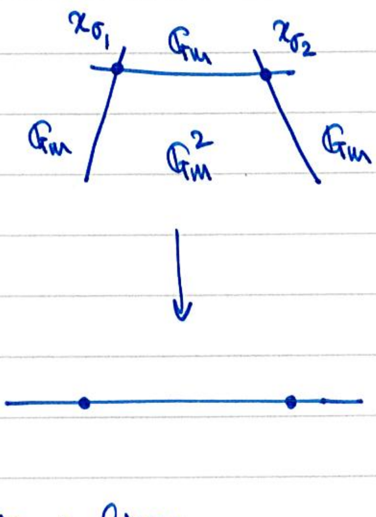
$$x_\sigma : u \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -u \in S_\sigma \quad (u \in \sigma^\perp) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple: $x_{\{0\}} \in T_N$

Prop : $X(\Delta) = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} \underbrace{T_N x_\sigma}_{=: O_\sigma}$

Exemple : $\mathbb{P}^1$  : $\mathbb{P}^1 = \mathbb{G}_m \sqcup \{0\} \sqcup \{\infty\}$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbb{G}_m 1 & \mathbb{G}_m 0 & \mathbb{G}_m \infty \end{array}$$

$\mathcal{O}(-a)$:



Variétés toriques lisses :

Lemme : Si $\sigma = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ avec $v_1, \dots, v_k$ complétables en une base de N, alors $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{n-k}$.

<u>Prop</u>: $X(\Delta)$ est lisse $\iff$ tout $\underset{\in\Delta}{\sigma}$ s'écrit $\langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ avec

$v_1, \dots, v_k$ complétable en une base de N.

<u>Lemme</u>: Si $\dim \sigma = n$ et U_σ est lisse en x_σ, alors $\sigma = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$

avec $v_1, \dots, v_n$ base de N. $(U_\sigma \simeq \mathbb{C}^n)$.

<u>Preuve</u>:

$x_\sigma \longleftrightarrow$ idéal maximal m de $\mathbb{C}[S_\sigma]$

$m = \langle \chi^u, u \in S_\sigma \setminus \{0\} \rangle$ (χ^u, c'est u vu dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$.)

$x_\sigma : u \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u \in \sigma^\perp \iff u = 0. \\ 0 & \text{sinon} \iff u \neq 0 \end{cases}$

m/m^2 est de dim. n par hypothèse.

Notons $\sigma^\vee = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ (k minimal)

$\rightsquigarrow \chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_k}$ indépendants dans m/m^2.

$\Rightarrow \underset{k}{\#\text{arêtes}} \leq n \Rightarrow k = n$ car $\dim \sigma^\vee = n$.

$\Rightarrow m/m^2 = \langle \chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_n} \rangle \Rightarrow \langle u_1, \dots, u_n \rangle = N^\vee$.

<u>Prop</u>: U_σ est toujours normal.

Si $\dim \sigma < n$, on note $N_\sigma = \langle \sigma \rangle \subset N$, on voit $\sigma \subset N_{\sigma,\mathbb{R}}$,

on choisit un supplémentaire $N = N_\sigma \oplus N''$ $\rightsquigarrow$ $U_\sigma = U'_\sigma \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$.

$\Rightarrow$ on est ramené à σ maximal.

<u>Résolution des singularités</u> :

Pour Δ donné, on veut trouver Δ' raffinement de Δ (tout $\sigma \in \Delta$ est une union d'éléments de Δ'), cela induit alors $X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$, qui est nécessairement propre.

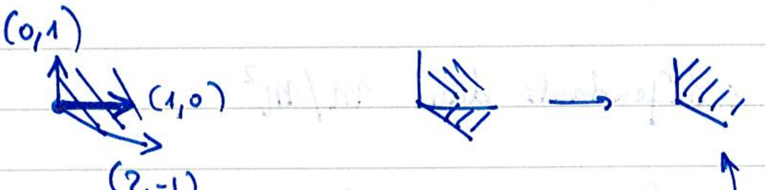
<u>Fait</u> : $X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$ est propre et birationnel.

car id sur le tore T_N.

Critère : $f : \underset{\Delta'}{N'} \to \underset{\Delta}{N}$, on veut $f^{-1}(\sigma) = \bigcup_{\substack{\sigma' \in \Delta' \\ \sigma' \subset f^{-1}(\sigma)}} \sigma'$

<u>But</u> : trouver Δ' tel que $X(\Delta')$ est lisse.

<u>Exemple</u> :

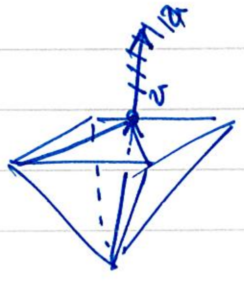


résout les singularités

$\mathbb{C}^2/\{\pm id\}$

<u>Procédure</u> : Δ un éventail, $v \in N$ $\rightsquigarrow$ $\Delta_v := \{\sigma \in \Delta,\ v \notin \sigma\} \cup \{\tau + \langle v \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}},\ \tau \text{ face de } \sigma, \text{ si } v \in \sigma\}$

<u>Ex</u> :



Etape 1 : Δ' simplicial

Par récurrence sur la dimension des cônes. 0-cônes, 1-cônes : OK.
Pour $k < n$: on veut rendre tous les $(k+1)$-cônes simpliciaux.

Pour $\sigma \in \Delta$ de dim. $k+1$ (pas simplicial), on choisit $v \in \mathrm{Int}(\sigma) \cap N$, on considère Δ_v, on va obtenir des cônes simpliciaux grâce à l'hypothèse de récurrence.

Etape 2 : $\sigma = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ avec $v_1, \dots, v_k$ indépendants sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{mult}(\sigma) = \underbrace{[N_\sigma : \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_k]}_{\geq 1} \quad \text{avec } N_\sigma = \langle \sigma \rangle_{\mathbb{R}} \cap N.$$

On cherche $v = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i$ avec ~~$t_i \in N$~~, $t_i < 1$, $v \in N$.

$\rightsquigarrow \sigma_i = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$, $\mathrm{mult}(\sigma_i) = t_i \, \mathrm{mult}(\sigma)$.

Existence de (t_i) :

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \ , -1 < t_i < 1 \right\} \subset N_{\sigma,\mathbb{R}}.$$

$$\mathrm{Vol}(C) = 2^k \times \mathrm{mult}(\sigma)$$

Si $\mathrm{mult}(\sigma) > 1$, par Minkowski $\Rightarrow C \cap (N_\sigma \setminus \{0\}) \neq \emptyset$

Si $t_i < 0$, on remplace par $t_i + 1$.

Au final on obtient $X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$ résolution des singularités,

qui est en plus équivariant.

On n'a pas besoin de Minkowski : il suffit de prendre $v \in N_\sigma$ tel que $v \notin \bigoplus \mathbb{Z} v_i$, puis de décaler v par $\bigoplus \mathbb{Z} v_i$.