Sofian – Introduction à la géométrie torique (09/11/23)

Référence : Fulton, Introduction to toric varieties

Préliminaires sur les cônes

N un réseau, $N \simeq \mathbb{Z}^n$, $V = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

Déf : Un cône est un ensemble de la forme $\sigma = \{ \sum r_i v_i \quad r_i \geq 0 \}$ v_i fixés.

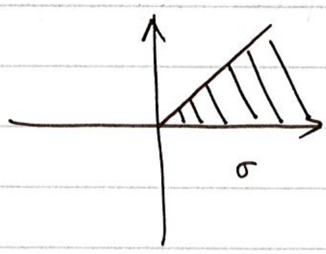
aussi appelé cône convexe polyédral (CCP)

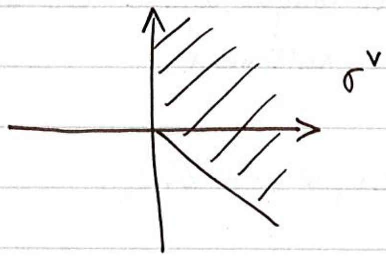
σ est rationnel si les $v_i \in N$.

Remarque : . $\sigma^\vee := \{ \varphi \in \mathrm{Hom}(N, \mathbb{R}) \mid \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \sigma \}$

. Une face τ de σ est un sous-ensemble de σ de la forme $\tau = \sigma \cap u^\perp$ avec $u \in \sigma^\vee$.

exemple : $N = \mathbb{Z}^2$





Proposition : Le dual d'un CCP est un CCP. [X CCP ?]

Remarque : . Si σ est rationnel alors $\sigma^\vee$ aussi.

. $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$

Proposition : Si σ est un cône rationnel, on pose $S_\sigma := \sigma^\vee \cap \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$. C'est un monoïde finiment engendré.

Dualité : On a une bijection entre les faces de σ et celles de $\sigma^\vee$:

$$\tau \longleftrightarrow \sigma^\vee \cap \tau^\perp$$

Lemme : Soit $u \in \sigma^\vee$, $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Alors $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)$

[x Dessin]

Preuve : $(\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u))^\vee = \sigma \cap (\mathbb{R}_{\geq 0}(-u))^\vee = \sigma \cap u^\perp = \tau$.

Proposition : Si σ est un cône rationnel, $u \in S_\sigma$, $\tau = \sigma \cap u^\perp$ est rationnelle et $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}(-u)$.

Variétés toriques affines

Déf : Une variété torique affine est un schéma de la forme $X_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$, pour σ un cône rationnel.

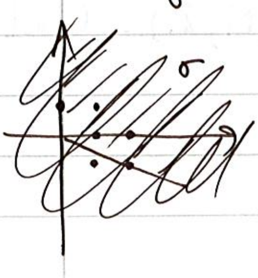
Exemple : $N = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$.

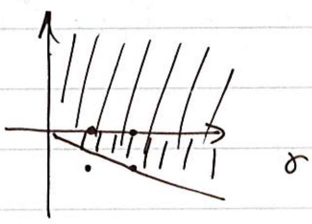
- $\sigma = \mathbb{N}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}e_n$ [x Dessin], $\sigma^\vee = \mathbb{N}e_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}e_n^\vee$.

  $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $X_\sigma = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

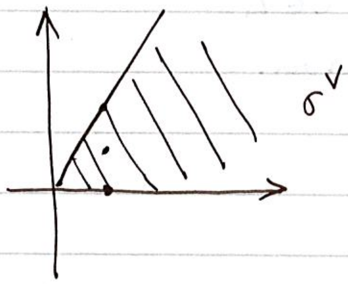
- $\sigma = \{0\}$, $\sigma^\vee = N$, $X_\sigma = \mathbb{G}^n_{m,\mathbb{C}}$.

- $(n=2)$ σ engendré par $e_2, 2e_1 - e_2$. [x Dessin]





$\rightsquigarrow$ $\sigma^\vee$ engendré par $e_1^\vee$, $e_1^\vee + e_2^\vee$, $e_1^\vee + 2e_2^\vee$



$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X, XY, XY^2] = \mathbb{C}[U,V,W]/(V^2 - UW)$$

$X_\sigma =$  [x un cône]

<u>Lemme</u> : Si τ est une face de σ, on a $X_\tau \to X_\sigma$ induit par $S_\sigma \subset S_\tau$, qui voit X_τ comme un ouvert principal de X_σ.

<u>Preuve</u> : $\tau = \sigma \cap u^\perp$ pour $u \in S_\sigma$, $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}(-u)$.
X_τ s'identifie à $D(u) \subset X_\sigma$.

<u>Déf</u> : Un cône rationnel σ est <u>fortement convexe</u> si $\{0\}$ est une face de σ, ce qui équivaut à dire que σ ne contient aucune droite. $(u, -u \in \sigma \Rightarrow u = 0)$.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ T_N}}{\mathbb{G}_m^n} \xhookrightarrow[\text{ouvert principal}]{} X_\sigma .$$

. T_N agit sur X_σ ; dualement $\mathbb{C}[S_\sigma] \to \mathbb{C}[S_\sigma] \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Hom}(N,\mathbb{Z})]$
$$u \longmapsto u \otimes u$$

Cela étend l'action de T_N sur lui-même.

<u>Recollement</u> :

Déf : Un *éventail* est un ensemble Δ de cônes rationnels fortement convexes tels que

- Si $\sigma \in \Delta$ et τ est une face de σ, alors $\tau \in \Delta$
- Si $\sigma, \sigma' \in \Delta$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face de chacun.

[x Dessin]

Lemme de séparation : σ, σ' cônes rationnels fortement convexes tels que $\overset{\tau}{\overset{\shortparallel}{\sigma \cap \sigma'}}$ est une face de chacun, alors il existe $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$.

(On peut séparer σ et σ' par un hyperplan.)

Prop : $S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$.

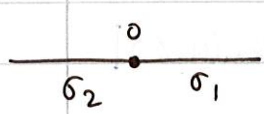
Preuve : $S_\tau \supset S_\sigma + S_{\sigma'}$; par le lemme de séparation, $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u)$
$\subset S_\sigma + S_{\sigma'}$.

Déf : Une variété torique est une variété de la forme $X(\Delta)$, avec Δ un éventail, obtenue en recollant les X_σ, pour $\sigma \in \Delta$, le long des ouverts $X_{\sigma \cap \sigma'}$.

Lemme : $X(\Delta)$ est séparé.

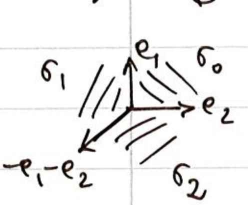
Preuve : $X_{\sigma\cap\sigma'} \longrightarrow X_\sigma \times X_{\sigma'}$ est une immersion fermée, car

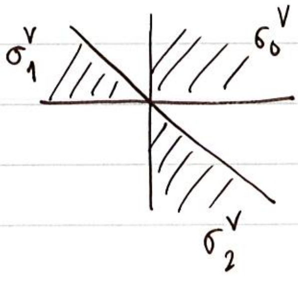
$\mathbb{C}[S_\sigma] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma'}] \longrightarrow \mathbb{C}[S_{\sigma\cap\sigma'}]$ est surjectif.

Ex :
- 

$(n=1)$ $\qquad X_{\sigma_1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$, $X_{\sigma_2} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X^{-1}]$.

  $X(\Delta) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

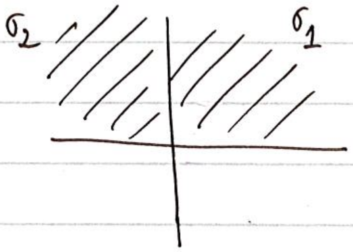
- 

$(n=2)$


$X_{\sigma_0} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y]$, $X_{\sigma_1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X^{-1}, X^{-1}Y]$

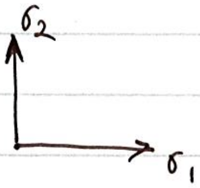
$X_{\sigma_2} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[Y^{-1}, XY^{-1}]$.

$X(\Delta) = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

- 

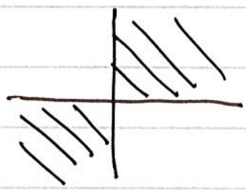
$$X_{\sigma_1} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y], \quad X_{\sigma_2} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X^{-1}, Y]$$

$$X(\Delta) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$$

- 

$$X_{\sigma_1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y, Y^{-1}]$$
$$X_{\sigma_2} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, X^{-1}, Y]$$

$$X(\Delta) = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{(0,0)\}$$

- 

$$X_{\sigma_1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y]$$
$$X_{\sigma_2} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X^{-1}, Y^{-1}]$$
$$X(\Delta) = (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \setminus \{(0,\infty), (\infty,0)\}$$