Géolog   GT Géométrie logarithmique.

Précurseur 1 : forme logarithmique $X/\mathbb{C}$ var lisse

$D \subset X$ diviseur à croisements normaux

localement $D = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 \cdots z_r = 0\} \subset \mathbb{C}^n$

$\Omega^\bullet_X(\log D)$ = complexe des formes logarithmiques

localement : $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{forme sur } X}}{\alpha} \wedge \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i_k}}{z_{i_k}}$ $1 \leq i_1 < \dots < i_k < r$

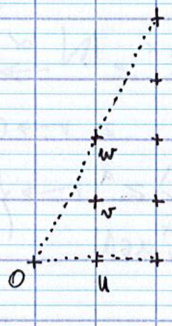
Fait : $\Omega^\bullet_X(\log D)$ calcule la cohomologie de $U = X \setminus D$.

$X \overset{j}{\hookleftarrow}$ indép

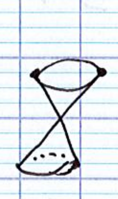
$\Omega^\bullet_X(\log D) \hookrightarrow j_* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{forme } C^\infty}}{\mathcal{A}^\bullet_U}$

Précurseur 2 : géométrie torique

variété torique affine : $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[P])$ où $\underset{\text{sous-monoïde}}{P \subset \mathbb{Z}^n}$



$\mathrm{Spec}\left(\frac{\mathbb{C}[u,v,w]}{(uw - v^2)}\right)$



Défn : Un <u>schéma logarithmique</u> (sur $\mathbb{C}$) est la donnée d'un schéma X d'un faisceau en monoïde $\mathcal{M}_X$ sur X, et un morphisme de faisceaux en monoïdes $\alpha : \mathcal{M}_X \to \mathcal{O}_X$ tq α induise un isomorphisme entre $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*)$ et $\mathcal{O}_X^\times$.

Exemple : 0) Structure log triviale : $\mathcal{M}_X = \mathcal{O}_X^\times \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_X$.

1) Structure logarithmique divisorielle associée à (X, D)

$$\mathcal{M}_X = \{ f \in \mathcal{O}_X \mid f|_{X \setminus D} \in \mathcal{O}_{X \setminus D}^\times \}$$

Localement, $\mathcal{M}_X \ni \underbrace{g(z_1, \dots, z_n)}_{\in \mathcal{O}_X^\times} z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$ $\quad a_i \in \mathbb{N}$

"X log D"

2) Structure log canonique sur les variétés toriques

cas affine : $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[P])$

structure induite par $P \hookrightarrow \mathbb{C}[P]$

3) $X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$ $\quad \mathcal{M}_X = \mathbb{C}^\times z^{\mathbb{N}} \overset{\alpha}{\to} \mathbb{C}$

pt

$$z \mapsto 0$$

$$\lambda z^a \mapsto \begin{cases} \lambda & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}^\times, a \in \mathbb{N}$

"point logarithmique" $\{0\}_{\log}$

(on pourrait remplacer $\mathbb{N}$ par n'importe quel monoïde)

$$\begin{array}{ccc} \text{"}\mathbb{A}^1 \log \{0\}\text{" log divisorielle} & \longleftrightarrow & \{0\}_{\log} \leftarrow \text{tiré en arrière.} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^1 \text{ trivial} & \longleftrightarrow & \{0\} \text{ trivial} \end{array}$$

Espace de Kato-Nakayama.

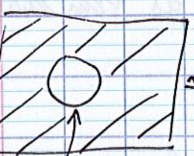
$(X, \mathcal{M}_X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X) \longmapsto X^{KN}$ espace topologique

$(X \log D)^{KN}$ éclatement réel orienté de X^{an} le long de D^{an}

(on remplace D par $N_{D/X} / \mathbb{R}_{>0}$

$\simeq$ localement près d'un pt lisse $D \times \mathbb{S}^1$

$$(\mathbb{A}^1 \log\{0\})^{KN} \longleftarrow (\{0\}_{\log})^{KN}$$


$\simeq \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^1$


$\mathbb{S}^1$

0 remplacé par $\mathbb{S}^1$

$$\begin{array}{l} (X \log D)^{KN} \\ \updownarrow \text{ équivalence d'homotopie} \\ X \setminus D \end{array}$$

Théorème [Kato-Nakayama]:

$$H^\bullet_{sing}(X^{KN}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}^\bullet(X, \omega^\bullet_X)$$

formellement

$$\omega^\bullet_X = \Omega^\bullet_X \langle d\log(m),\ m \in \mathcal{M}_X \rangle \Big/ \begin{matrix} \alpha(m)\, d\log(m) = d\alpha(m) \\ d\log(m_1 m_2) = d\log(m_1) + d\log(m_2) \end{matrix}$$

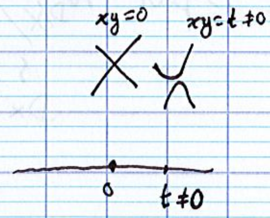
---

* Log lissité

ex: toutes les variétés toriques avec leur structure logarithmique canonique sont log lisse sur Spec($\mathbb{C}$)

ex: dégénérescences semistables

$$\{xy=t\} \downarrow \mathbb{A}^1_t$$



devient un morphisme log lisse avec les structures logarithmiques divisorielles.

Théorème [F. Kato]:

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est l'espace de module des courbes log lisses.

$\cup$

$\mathcal{M}_{g,n}$