Paul-Émile 2

Rappels :

$X \subset \mathbb{P}(V)$

$$W_X^\circ = \left\{ (x, f) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \; ; \; x \in X_{reg} \, , \, T_{\tilde{x}} \tilde{X} \subset \{\hat{f} = 0\} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} & W_X^\circ \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}(V) & & \mathbb{P}(V^*) \end{tikzcd}$$

$W_X^\circ \xrightarrow{\pi_1} X_{reg}$ fibration lisse

$W_X = \text{Adhérence}(W_X^\circ)$ est une variété algébrique dans $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$

Par définition, $\pi_1(W_X) = X$

On prends maintenant comme définition $X^\vee := \pi_2(W_X)$, c'est une variété projective.

$$\begin{tikzcd} & W_X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & X^\vee \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{W}_X \subset V \times V^* = T^*V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr] & \\ \tilde{X} & & \tilde{X}^\vee \end{tikzcd}$$

Fibrés conormaux

M variété complexe, TM fibré tangent holomorphe

T^*M cotangent $\qquad \pi : T^*M \longrightarrow M$

Forme de Liouville :

θ = 1-forme sur T^*M définie par :

si $(\xi, m) \in T^*M$ (avec $\xi \in T_m^*M$) et $v \in T_{(\xi,m)}(T^*M)$, alors

$$\langle \theta|_{(\xi,m)}, v \rangle = \langle \xi, T\pi(v) \rangle$$

description locale : $(z_1,\dots,z_n) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ carte holomorphe sur $\mathcal{U} \subset M$.

$\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\Big|_m\right)_{i=1,\dots,n}$ base de $T_m M$

$\left(dz_i\big|_m\right)_{i=1,\dots,n}$ base duale de $T_m^* M$

Coordonnées : $p_i : T^*M \longrightarrow \mathbb{C}$

$(\xi, m) \longmapsto \left\langle \xi, \frac{\partial}{\partial z_i}\Big|_m \right\rangle$

alors $(z_1,\dots,z_n,p_1,\dots,p_n)$ définit une carte sur $T^*M\big|_{\mathcal{U}} = T^*\mathcal{U}$

Sur $T^*\mathcal{U}$, $\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dz_i$

Forme symplectique : $\Omega = d\theta$

localement $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dz_i$

on a $\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = 0$

$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = 0$

$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij}$

Exemple : $M = V$ espace vectoriel. $T^*V = V \times V^*$. $\Omega((v,\xi),(v',\xi')) = \langle \xi, v' \rangle - \langle \xi', v \rangle$

Soit $\Lambda \subset T^*M$ une sous-variété complexe. $\iota_\Lambda : \Lambda \hookrightarrow T^*M$ l'inclusion.

Defn : Λ est une sous-variété Lagrangienne si :

* $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda = \dim_{\mathbb{C}} M = n$
* $\iota_\Lambda^*(\Omega) = 0$

Variétés conormales

Z sous-variété de M

$$T^*_Z M = \left\{ (\xi, m) \in T^*M \, ; \, \begin{array}{l} 1)\ m \in Z \\ 2)\ \langle \xi, T_m Z \rangle = 0 \end{array} \right\} \subset \begin{array}{c} T^*M|_Z \\ \downarrow \\ Z \end{array} \quad \text{sous fibré}$$

Remarque : $\mathbb{C}^*$ agit sur T^*M par $t\cdot(\xi, m) = (t\xi, m)$.

$T^*_Z M$ est stable sous cette action "sous-variété conique".

Prop : $T^*_Z M$ est une sous-variété Lagrangienne et conique de T^*M

Preuve : vérifions que $i_\Lambda^*(\theta) = 0$.

Soit $m_0 \in Z$, $(z_1, \dots, z_n) : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^n$ une carte définie au voisinage de m_0,

telle que $Z \cap \mathcal{U} = \{ z_1(m) = \cdots z_k(m) = 0 \}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\Big|_m \right)_{i = k+1, \dots, n} \text{ base de } T_m Z \quad \text{pour } m \in Z \cap \mathcal{U}.$$

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i dz_i$$

$$i_\Lambda^*(\theta) = \sum_{i=1}^n p_i|_\Lambda dz_i|_\Lambda$$

$m \in Z \cap \mathcal{U}$ on a : $(\xi, m) \in T^*_Z M \iff p_i(\xi, m) = 0 \ \forall i = k+1, \dots, m$.

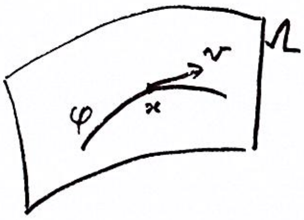
$\rightsquigarrow dz_i|_\Lambda = 0$ si $i \leq k$ et $p_i|_\Lambda = 0$ si $i \geq k+1$ $\rightsquigarrow i_\Lambda^* \theta = 0$.

autrement dit on a utilisé

$$T^*_Z M \cap T^*\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{c} z_1(m) = \cdots = z_k(m) = 0 \\ \text{et} \\ p_{k+1}(\xi, m) = \cdots = p_m(\xi, m) = 0 \end{array} \right\}$$

Prop: Soit Λ une ss-variété Lagrangienne de T^*M. On suppose de plus que ① Λ est conique et ② la projection $\pi : T^*M \longrightarrow M$ induit une submersion $\pi : \Lambda \longrightarrow Z$ où Z est une sous-variété, avec $Z = \pi(\Lambda)$. Alors $\Lambda = T^*_Z M$.

Étape 1: Montrons que $\theta|_\Lambda \equiv 0$.



il suffit de le voir sur les courbes.

Soit $\varphi : \{|s| < \varepsilon\} \longrightarrow \Lambda$ une courbe holomorphe

$\varphi(0) = x = (\xi_0, m_0) \in \Lambda$

$(z_1, \dots, z_n)$ une carte au voisinage de m_0.

Au voisinage de (ξ_0, m_0), on a $\theta = \sum p_i dz_i$

$$\varphi^*\theta = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i(s) Q_i'(s)\right) ds$$

où $P_i(s) = p_i(\varphi(s))$ $\qquad$ $Q_i(s) = z_i(\pi(\varphi(s)))$

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C}^* \times \{|s| < \varepsilon\} &\longrightarrow \Lambda \\ (t, s) &\longmapsto t \cdot \varphi(s) \end{aligned}$$

Comme Λ est lagrangienne on a $d\theta|_\Lambda = 0$, donc

$$\Psi^*\left(d\theta|_\Lambda\right) = 0$$

$$\|$$

$$d(\Psi^*\theta)$$

$$\Psi^*\theta = \sum \underbrace{p_i \circ \Psi}_{tP_i(s)} \; \underbrace{d(z_i \circ \Psi)}_{Q_i'(s)ds} \qquad = t\left(\sum P_i(s) Q_i'(s)\right) ds$$

$$0 = d(\psi^*\theta) = dt \wedge ds\left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i'\right) \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^n P_i Q_i' = 0 \quad \Rightarrow \psi^*\theta = 0.$$

<u>Étape finale</u> : $\Lambda = T_Z^* M$

$(\xi_0, m_0) \in \Lambda$ carte $(z_1, \dots, z_n)$ au voisinage de $m_0 \in Z \subset M$

telle que $Z \cap \mathcal{U} = \{z_1(m) = \dots = z_k(m) = 0\}$

les $\left(dz_i|_m\right)_{k+1 \leq i \leq n}$ forment une base de $T_m^* Z$ pour $m \in Z \cap \mathcal{U}$

$(\xi, m) \in \Lambda \cap T^*\mathcal{U}$

$$\left.\begin{array}{l} \theta|_\Lambda = 0 \\ \text{en } (\xi, m) \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^n p_i(\xi, m) dz_i|_m, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in T_{(\xi,m)}\Lambda$$

$$T\pi : T_{(\xi,m)}\Lambda \longrightarrow T_m Z \quad \text{surjective}$$
$$v \longmapsto v'$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m p_i(\xi, m) \langle dz_i|_m, v' \rangle = 0 \quad \forall v' \in T_m Z$$

pour $i \leq k$, $\langle dz_i|_m, v' \rangle = 0$

donc $p_i(m, \xi) = 0$ pour $i = k+1, \dots, n$.

$\Leftrightarrow (\xi, m) \in T_Z^* M$

$\square$

Preuve du thm de bidualité

$$\begin{tikzcd} & \tilde{W}_X^{o'} \subset T^*V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \tilde{X}^{o'} & & \tilde{X}^{\vee, o'} \end{tikzcd}$$

lisses, submersions, sur des ouverts de Zariski

Par définition, $\tilde{W}_X^{o'}$ est le fibré conormal $T^*_{\tilde{X}^{o'}}V$

donc une ss var Lagrangienne de T^*V

conique par rapport à l'action de $\mathbb{C}^*$ sur V^*

$$\begin{tikzcd} \pi_2 : \tilde{W}_X^{o'} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & \tilde{X}^{\vee, o'} \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] \\ T^*V \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & V^* \\ T^*V^* & \end{tikzcd}$$ submersion

$\Rightarrow$ $\tilde{W}_X^{o'}$ est aussi le conormal $T^*_{\tilde{X}^{\vee, o'}}V^*$

$X \subset \mathbb{P}(V)$

$X^\vee \subset \mathbb{P}(V^*)$

pour $(x, f) \in X \times X^\vee$ générique, on a :

$$T_{\tilde{x}}\tilde{X} \subset \{\tilde{f} = 0\} \iff T_{\tilde{f}}\tilde{X}^\vee \subset \{\tilde{x} = 0\}$$

$$\Rightarrow (X^\vee)^\vee = X.$$