Paul-Émile

Dualité projective

Notations

$$\begin{array}{ccc} V\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ \tilde{x} & \longmapsto & x \end{array}$$

Espace tangent (holomorphe : $T^{1,0}M$)

$$0 \to \mathbb{C}\tilde{x} \longrightarrow T_{\tilde{x}}V \longrightarrow T_x\mathbb{P}(V) \longrightarrow 0$$

$$T_x\mathbb{P}(V) \simeq V/\mathbb{C}\tilde{x}$$

$$\begin{tikzcd} X \subset \mathbb{P}(V) \\ \tilde{X} \subset V\setminus\{0\} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$X \subset \mathbb{P}(V)$ var algébrique projective

$\tilde{X} \subset V\setminus\{0\}$ var affine $\mathbb{C}^*$-conique

ouvert de Zariski

$$\begin{tikzcd} X_{reg} \arrow[r, phantom, "\subset"] & X \\ \tilde{X}_{reg} \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \tilde{X} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

si $x \in X_{reg}$, $\quad T_xX \simeq T_{\tilde{x}}\tilde{X}/\mathbb{C}\tilde{x}$

Dualité

L sous-espace de $\mathbb{P}(V) \longleftrightarrow L^\vee$ sous-espace de $\mathbb{P}(V^*)$

$L = \mathbb{P}(W)$, W sev de V $\qquad L^\vee = \mathbb{P}(W^\perp)$ orthogonal pour la dualité

Prop : $(L^\vee)^\vee = L$

Dualité pour les variétés projectives

Définition : $X \subset \mathbb{P}(V)$

$$X^{\vee,0} = \left\{ f \in \mathbb{P}(V^*) \,;\, \exists x \in X_{reg} \,,\, \langle \tilde{f}, \tilde{x} \rangle = 0 \text{ et } T_x X \subset \frac{\{\tilde{f}=0\}}{\mathbb{C}\hat{x}} \right\}$$

$$= \left\{ f \in \mathbb{P}(V^*) \,;\, \exists x \in X_{reg} \,,\, T_{\hat{x}} \tilde{X} \subset \{\tilde{f} = 0\} \right\}$$

$$X^\vee = \text{Adhérence}\,(X^{\vee,0})$$

↳ euclidienne

Théorème :
1. $X^\vee$ est algébrique
2. $X^{\vee,0}$ ouvert de Zariski de $X^\vee$
3. $X^\vee$ irréductible si X l'est
4. $(X^\vee)^\vee = X$
5. si $(x,f) \in X_{reg} \times X^\vee_{reg}$, $T_{\hat{x}} \tilde{X} \subset \{\tilde{f} = 0\} \iff T_{\hat{f}} \tilde{X}^\vee \subset \{\tilde{x} = 0\}$

Plan :
1. Exemples
2. Preuve du thm

Exemple 1 : le cas des courbes

$$\gamma : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$$

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1} \quad \text{homogène de degré } N \geq 1$$

$$p_\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t,1) \qquad p_\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$$

Rem : $\forall \tilde{f} \in \mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\}$

$t \longmapsto \langle \tilde{f}, p_\gamma(t) \rangle$ est polynomiale de degré $\leq N$

et degré N pour $\hat{f}$ générique

$X = \mathrm{Image}(\gamma)$

$$X^\vee = \{ f \in \mathbb{P}^d \ ; \ \tilde{a} \in \mathbb{C}^2 \text{ tq } \ \langle \tilde{f}, \tilde{\gamma} \rangle (\tilde{a}) = \frac{\partial}{\partial x} \langle \hat{f}, \hat{\gamma} \rangle (\tilde{a}) = \frac{\partial}{\partial y} \langle \hat{f}, \tilde{\gamma} \rangle (\tilde{a}) = 0 \}$$

Relation d'Euler : $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré N

$\forall t \in \mathbb{C} \qquad P(tx_1, \dots, tx_n) = t^N P(x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow N P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

$X^\vee = \{ f \in \mathbb{P}^d \ ;$ le polynôme $t \mapsto \langle \tilde{f}, p_\gamma(t) \rangle$ admet une racine double $\}$

$\cup$ le cas où $d^\circ \langle \hat{f}, p_\gamma \rangle \leq N-2$

(racine double à l'infini)

Exemple : courbe de Veronese

$$\gamma : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$$
$$v \longmapsto v^d$$

$$\gamma([x:y]) = [x^d : x^{d-1}y : \dots : xy^{d-1} : y^d]$$

$$\langle \tilde{f}, p_\gamma(t) \rangle = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k \qquad \text{pour } f = [a_d : a_{d-1} : \dots : a_0]$$

$$X^\vee = \{ [a_d : \dots : a_0] \in \mathbb{P}^d \text{ tq } P = \textstyle\sum a_k t^k \text{ admet une racine double} \}$$

$$= \{ P, \ \Delta(P) = 0 \}$$

$d=3$

$$X^\vee = \{ [a:b:c:d] \ ; \ b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4db^3 = 0 \}$$

Exemple 2 : Le cas des hypersurfaces

$P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ homogène de degré N

$X = \{x \in \mathbb{P}^n ; P(\tilde{x}) = 0\}$

$$\nabla P : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$
$$x \longmapsto \left(\frac{\partial P}{\partial x_0}(x), \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)\right)$$

chaque $x \mapsto \frac{\partial P}{\partial x_i}(x)$ polynôme homogène de degré $N-1$.

on peut le voir comme $\nabla P : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$

ici, $X^\vee = \{\nabla P(x), x \in X\}$

$$X^{\vee,0} = \{f \in \mathbb{P}^d, \exists x \in X_{reg}, \underbrace{T_{\tilde{x}}\hat{X} \subseteq \{\tilde{f} = 0\}}\}$$

ici c'est nécessairement une égalité par dimension

$\Updownarrow$

$f = \nabla P(x)$

Exemple 1 : Conique lisse

$\mathcal{C}_A = \{x \in \mathbb{P}^2 ; \langle A\tilde{x}, \tilde{x}\rangle = 0\}$ $\qquad$ $A \in M_3(\mathbb{C})$ inversible symétrique

ici $P(\tilde{x}) = \langle A\tilde{x}, \tilde{x}\rangle$, $\nabla P(\tilde{x}) = A\tilde{x}$

$$\mathcal{C}_A^\vee = \{[A\tilde{x}], \langle A\tilde{x}, \tilde{x}\rangle = 0\} = \{y \in \mathbb{P}^2 ; \langle A^{-1}\tilde{y}, \tilde{y}\rangle = 0\} = \mathcal{C}_{A^{-1}}$$

Exemple 2 : variétés de Fermat

$X_3 = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 ; x^3 + y^3 = z^3\}$

$P(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^3$ $\qquad$ $\nabla P(x,y,z) = 3(x^2, y^2, -z^2)$

$X_3^\vee = \{[x^2 : y^2 : -z^2] ; x^3 + y^3 = z^3\}$

$p = x^2 \quad q = y^2 \quad r = -z^2$

$x^3 + y^3 = z^3$

$\hookrightarrow p^3 + q^3 + 2(xy)^3 = -r^3$

$\hookrightarrow (p^3 + q^3 + r^3)^2 = 4p^3q^3$

$$X_3^\vee = \{[p:q:r] ; (p^3+q^3+r^3)^2 = 4p^3q^3\}$$

Théorème : $X \subset \mathbb{P}^2$ courbe lisse de degré d

$\Rightarrow X^\vee$ est de degré $d(d-1)$

Preuve : ① $X^\vee$ est algébrique

② $X^{\vee,0}$ ouvert de Zariski

③ X irred $\Rightarrow X^\vee$ irred

Variété d'incidence

$$X^{\vee,0} = \{ f \in \mathbb{P}(V^*) \,,\, \exists x \in X_{reg} \,,\, T_{\tilde{x}} \tilde{X} \subset \{\tilde{f} = 0\} \}$$

Defn : $W_X^\circ = \{ (x, f) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \,;\, x \in X_{reg} \text{ et } T_{\tilde{x}} \tilde{X} \subset \{\tilde{f} = 0\} \}$

$\pi_1 \swarrow \mathbb{P}(V) \qquad \searrow \pi_2 \; \mathbb{P}(V^*)$

$W_X =$ adhérence de W_X°

$$\pi_1(W_X^\circ) = X_{reg} \qquad \pi_2(W_X^\circ) = X^{\vee,0}$$

Lemme : W_X est une variété algébrique

W_X° ouvert de Zariski de W_X

$\pi_2(W_X) = X^\vee$ est une variété algébrique

On considère des polynômes homogènes $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{C}[V]$ tq $X = \{ x \in \mathbb{P}(V) \,,\, P_1(\tilde{x}) = \dots = P_\ell(\tilde{x}) = 0 \}$

$\tilde{x} \in V \setminus \{0\} \qquad dP_i(\tilde{x}) \in V^*$

$r(x) := \text{rang}(dP_1(\tilde{x}), \dots, dP_\ell(\tilde{x}))$

Defn : $r_X = \max_{x \in X} r(x)$

Supposons X irréductible, alors $X_{reg} = \{ x \in X \,;\, r(x) = r_X \}$

si $x \in X_{reg}$, $\quad T_{\tilde{x}}\tilde{X} = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{v \,;\, \langle dP_i(\tilde{x}), v\rangle = 0\}$

$$T_{\tilde{x}}\tilde{X} \subset \{\tilde{f}=0\} \iff \hat{f} \in \mathrm{Vect}(dP_i(\hat{x}))$$

$$\iff \mathrm{rang}\left(\tilde{f}, dP_1(\hat{x}), \dots, dP_\ell(\hat{x})\right) = r_X$$

$$W_X = \{(x,f) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \,;\, \langle \tilde{f}, \hat{x}\rangle = 0,\ x \in X,\ \mathrm{rang}\left(\tilde{f}, dP_1(\hat{x}), \dots, dP_\ell(\hat{x})\right) \leq r_X\}$$

$$\cup$$

$$W_X^{\circ} = \pi_1^{-1}(X_{reg})$$

Nouvelle définition de $X^\vee$: $\quad X^\vee := \pi_2(W_X)$. $\quad$ (on travaille avec des variétés projectives $\Rightarrow X^\vee$ est projective)