

Fibrés de jets et complexes de Koszul

25 mars 2026. Matthieu Romagny.

Groupe de travail Gelfand-Kapranov-Zelevinsky, <https://delcroix.perso.math.cnrs.fr/GTGKZ/>

1. Introduction

Dans l'article *On the theory of elimination* de 1848, Cayley présente une méthode qui permet de calculer le discriminant Δ_X d'une variété algébrique X , i.e. l'équation de l'hypersurface $X^\vee$ (dans le cas où c'en est une). Il y a trois étapes :

1. Interpréter la condition $\Delta_X(f) = 0$ comme signifiant que le complexe de Koszul $K(J, f)$ d'un certain fibré de jets $J \rightarrow X$ n'est pas exact.
2. Obtenir une interprétation identique en remplaçant le complexe de Koszul (un complexe de faisceaux cohérents) par le complexe des sections globales de $K(\mathcal{L})$ (un complexe d'espaces vectoriels) avec $\ell \gg 0$ pour que les composantes de K n'aient pas de cohomologie.
3. Calculer $\Delta_X(f)$ comme le déterminant de ce dernier complexe.

Dans cet exposé on introduit les jets et leur complexe de Koszul.

On note $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V (convention opposée à celle de Grothendieck). On note par la même lettre un fibré vectoriel et le faisceau de ses sections locales.

2. Jets d'un fibré en droites

Références :

- Saunders, The Geometry of jet bundles, CUP, 1989
- EGA4, §§16.7-16.8

On fixe une variété algébrique complexe X , irréductible de dim. k , et un fibré en droites L sur X .

2.1. Définition

Point de vue géométrie différentielle

- le fibré des jets à l'ordre 1 de L est le fibré vectoriel $J(L) \rightarrow X$ dont la fibre en un point x est l'ensemble des germes de section $f : U \rightarrow L$ définies sur un voisinage de x , modulo les germes qui s'annulent en x ainsi que toutes leurs dérivées premières. Plus précisément, si on note $I_x = (t_1, \dots, t_k)$ l'idéal des germes de fonctions nulles en x et $\tilde{L}_x$ l'ensemble des germes de sections en x , on a

$$J(L)_x := \tilde{L}_x / I_x^2 \tilde{L}_x.$$

- au-dessus d'un ouvert U muni de coordonnées $(t_1, \dots, t_k)$ et sur lequel L est trivial, une section de L s'identifie à une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. En un point x de coordonnées t_i voisin de $x_0 \in U$, à l'ordre 1 on peut écrire

$$f(x) = a + b_1 t_1 + \dots + b_k t_k$$

où $a = f(x_0)$ et $b_i = (\partial f / \partial t_i)(x_0)$. Alors $(a, b_1, \dots, b_k)$ fournissent des coordonnées pour $J(L)$ au voisinage du jet $[f]$. On voit que le fibré $J(L) \rightarrow X$ est de rang $k + 1$.

- l'application de jet $j : L \rightarrow J(L)$, $f \mapsto [f]$ est $\mathbb{C}$ -linéaire surjective *mais* n'est pas un morphisme de fibrés – elle n'est pas $\mathcal{O}_X$ -linéaire. Ouf, ça ferait n'importe quoi avec les rangs des fibrés.

Point de vue géométrie algébrique

Pour réunir les fibres $\tilde{L}_x / I_x^2 \tilde{L}_x$ en un fibré il faut travailler dans $X \times X$. Il s'y trouve :

- la diagonale $\Delta \subset X \times X$; on note I le faisceau des fonctions qui s'annulent dessus,

- le 1^{er} voisinage infinitésimal de la diagonale $X^{(1)} \subset X \times X$ qui est le fermé défini par l'idéal I^2 . Intuitivement ses points sont les paires composées d'un point x_0 et un point x qui lui est proche à l'ordre 1. On note $p_1, p_2 : X^{(1)} \rightarrow X$ les deux projections.

Une fois ces notations posées on définit $J(L) := p_{1,*}p_2^*L$.

On définit de même $X^{(n)}$ par l'idéal I^{n+1} et les n -jets $J^n(L)$. Dans EGA4, §§16.7-16.8 le fibré des n -jets $J^n(L)$ est appelé fibré des *parties principales d'ordre n* et noté $\mathcal{P}_X^n(L)$.

Lien avec le discriminant

Soit $X \subset \mathbb{P}(V^*)$ une variété projective lisse. Soit $L = \mathcal{O}_X(1)$. Soit $f \in V$ un vecteur, qui définit une section globale de $\mathcal{O}(1)$ de $\mathbb{P}(V^*)$ (on rappelle qu'on est dans la convention classique) et donc par restriction une section globale de L .

L'énoncé suivant découle directement de la définition d'un jet :

Proposition : le vecteur $f \in V$ représente un point de la variété duale $X^\vee \subset \mathbb{P}(V)$ si et seulement si le jet $j(f) \in J(L)$ s'annule en un point $x \in X$. ■

2.2. Propriétés

1. Le calcul des jets s'applique sur les fonctions : $J(L) \simeq J(\mathcal{O}_X) \otimes L$.
2. Le fibré $J(L)$ s'insère dans une suite exacte appelée *suite exacte d'Atiyah* :

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \otimes L \rightarrow J(L) \rightarrow L \rightarrow 0$$
 (dont la classe est la *classe d'Atiyah* dans Ext^1).
3. Soit $X = \mathbb{P}(V^*)$ et $L = \mathcal{O}(1)$. Alors $J(L) \simeq \mathcal{O}_X \otimes V$ et la suite d'Atiyah s'identifie (au twist près) avec la *suite exacte d'Euler* sur l'espace projectif

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes V \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

Démonstration :

1. Sur les germes en un point x , l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x} \otimes \tilde{L}_x \simeq \tilde{L}_x, a \otimes f \mapsto af$, passe au quotient en un isomorphisme $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}/I_x^2 \otimes \tilde{L}_x \simeq \tilde{L}_x/I_x^2$. C'est l'isomorphisme recherché.
 Avec la définition de géométrie algébrique on construit cet isomorphisme en observant que $p_{1,*}p_2^*$ est l'identité sur les ouverts de X . Plus précisément, pour un ouvert de X on a

$$(p_{1,*}p_2^*L)(U) = (p_2^*L)(U^{(1)}) = L(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X^{(1)}}(U).$$
 En utilisant ça pour $L = \mathcal{O}_X$ on trouve $(p_{1,*}p_2^*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_{X^{(1)}}(U)$ puis

$$(L \otimes p_{1,*}p_2^*\mathcal{O}_X)(U) = L(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X^{(1)}}(U).$$
2. Le morphisme $J(L)_x \rightarrow L_x$ associe au jet $[f]$ la valeur $f(x)$. En coordonnées cela fait $(a, b_1, \dots, b_k) \mapsto a$.
 Calculons le noyau : on a $J(\mathcal{O}_X) = p_{1,*}(\mathcal{O}_{X \times X}/I^2)$ et comme $\ker(\mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow \mathcal{O}_X) = I$, on trouve
 $\ker(J(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X) = p_{1,*}(I/I^2) = \Delta^*(I/I^2) = \Omega_X^1$. On a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow J(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$
 et puis on tensorise par L . On peut le faire plus à la main : un jet $[f]$ dont la valeur en x_0 est nulle est la donnée de $(\partial f / \partial t_1)(x_0), \dots, (\partial f / \partial t_k)(x_0)$. C'est la même chose que la forme différentielle qui à $\partial = \sum u_i (\partial / \partial t_i)(x_0)$ associe le scalaire $\sum u_i (\partial f / \partial t_i)(x_0)$.
3. On remarque que les éléments de V s'identifient à des sections globales de $\mathcal{O}(1)$, et on considère la flèche $\mathcal{O}_X \otimes V \rightarrow J(L)$ qui à $1 \otimes f$ associe le jet de f . C'est un isomorphisme. La suite exacte d'Euler a été mentionnée pour mémoire ou pour la culture, je n'en démontre rien. ■

2.3. Les jets comme formes différentielles invariantes (sous $\mathbb{C}^*$)

En géométrie algébrique

On sait que si $G = \mathbb{C}^*$ agit sur une variété Y alors il agit sur tout $\mathcal{O}_Y$ -module cohérent $\mathcal{F}$ et celui-ci se décompose en somme directe de sous-espace propres $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n$, où $z \cdot x = z^n x$ lorsque $z \in \mathbb{C}^*$ et $x \in \mathcal{F}_n$ (les $\mathcal{F}_n$ ne sont pas des modules sur Y mais plutôt sur $X = Y/G$). Ainsi :

$$\mathcal{O}_Y = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{Y,n} \quad (\text{fonctions régulières}), \quad \Omega_Y^1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_{Y,n}^1 \quad (\text{formes diff.}).$$

La différentielle $d : O_Y \rightarrow \Omega_Y^1$ est G -invariante parce que l'action naturelle sur les fonctions et sur les 1-formes se fait de la même manière : par précomposition, et homogène de degré 0 au sens où $d(O_{Y,n}) \subset \Omega_{Y,n}^1$. Si $Y \rightarrow X$ est un G -espace principal homogène, ou G -torseur, et t est une coordonnée dans les fibres, alors au-dessus d'un petit ouvert de X on a $O_Y = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} O_X t^n = O_X[t, t^{-1}]$. Pour $f = gt^n \in O_{Y,n}$ où g est une fonction sur X , on a $dg = d(ft^n) = t^n df + n f t^{n-1} dt$.

En géométrie différentielle

La décomposition de Ω_Y^1 en sous-espaces propres se voit autrement. L'action de $\mathbb{C}^*$ donne naissance au champ de vecteurs d'Euler ξ , qui est le générateur du flot de l'action : pour tout $y \in Y$ on a $\xi(y) = d\omega_1(1)$, vitesse au temps $t = 1$ de l'orbite $\omega : \mathbb{C}^* \rightarrow Y, t \mapsto ty$. Comme tout champ de vecteurs, ξ définit une *dérivée de Lie* L_ξ sur les formes différentielles, et en ces termes on a

$$\Omega_{Y,n}^1 = \{\omega \in \Omega_Y^1 \text{ t.q. } L_\xi(\omega) = n\omega\}.$$

La dérivée de Lie est définie par $L_\xi \omega = i_\xi d\omega + di_\xi \omega$ pour toute 1-forme ω . Ici i_ξ est le produit intérieur (contracté) d'une forme avec ξ , qui envoie une p -forme ω sur la $(p-1)$ -forme $i_\xi(\omega) = \omega(\xi \wedge -)$, par exemple $i_\xi(\omega) = \omega(\xi)$ pour une 1-forme et $(i_\xi \omega)(X) = \omega(\xi \wedge X)$ pour une 2-forme.

Construction

Revenons à une variété X avec un fibré en droites L . La variété $Y = L^* \setminus \{0\}$ est un $\mathbb{C}^*$ -espace principal homogène $\pi : Y \rightarrow X$. Toute section f de $L = \text{Hom}_X(L, \mathbb{C}^*)$ sur un ouvert U définit forme linéaire sur L^* qui se retreint en une fonction $f_Y : Y \rightarrow \mathbb{C}_X^*$ homogène de degré 1 sur Y , en fait sur $\pi^{-1}(U)$. Sa différentielle df_Y est un élément de $\Omega_{Y,1}^1(\pi^{-1}(U))$ qui ne dépend que du jet de f au point x où l'on travaille, car la règle de Leibniz assure que $d(I_x^2) = 0$.

Proposition : Cette construction fournit un isomorphisme $J(L) \simeq \pi_* \Omega_{Y,1}^1$.

Démonstration : je ne suis pas très satisfait de ce qu'écrivent GKZ (presque rien en fait) mais je préfère passer du temps sur la suite. ■

3. Complexes de Koszul

Références :

- Matsumura, *Commutative ring theory*, CUP, §16
- Griffiths et Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, chap 5 §3

Sur la variété X , un certain complexe de Koszul va permettre de détecter la condition $\Delta_X(f) = 0$.

Commençons avec un fibré vectoriel $E \rightarrow X$ de rang r , et une section globale s . À ces données est associé le *complexe de Koszul positif*

$$K_+(E, s) = \left(0 \longrightarrow O_X \xrightarrow{s} E \xrightarrow{\wedge s} \bigwedge^2 E \xrightarrow{\wedge s} \dots \xrightarrow{\wedge s} \bigwedge^r E \longrightarrow 0 \right)$$

et son dual le *complexe de Koszul négatif*

$$K_-(E, s) = \left(0 \longrightarrow \bigwedge^r E^* \xrightarrow{i_s} \dots \xrightarrow{i_s} \bigwedge^2 E^* \xrightarrow{i_s} E^* \xrightarrow{i_s} O_X \longrightarrow 0 \right).$$

Dans $K_+(E, s)$ la différentielle est $d(v) = v \wedge s$ et dans $K_-(E, s)$ c'est l'application duale, appelée *produit intérieur* ou *contraction* telle que $d(\varphi) = \varphi(- \wedge s)$. Le complexe $K_+(E, s)$ est gradué avec $\bigwedge^i E$ en degré i , et $K_-(E, s)$ est gradué avec $\bigwedge^i E^*$ en degré $-i$. On a un isomorphisme :

$$K_-(E, s) \simeq K_+(E, s) \otimes \bigwedge^r E^*[r].$$

Proposition : $K_+(E, s)$ exact $\iff K_-(E, s)$ exact $\iff s$ ne s'annule pas sur X .

Démonstration : on commence par le cas où X est un point, on a des complexes de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels et s est un

vecteur. Si $s \neq 0$ on le complète en une base $s = e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et on utilise la base des $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_h}$, $I = i_1 < \dots < i_h$, dans chaque $\wedge^h E$. Si $v = \sum_{|I|=h} v_I e_I$ vérifie $d(v) = 0$ alors nécessairement I contient 1 à chaque fois que $e_I \neq 0$, car sinon les $e_I \wedge s$ sont des vecteurs libres. Ceci montre que $\ker(d) \subset \text{im}(d)$ i.e. $K_+(E, s)$ est exact. Par dualité $K_-(E, s)$ l'est aussi. Revenons à notre variété X , si s ne s'annule jamais ce qui précède montre que $K_+(E, s)$ et $K_-(E, s)$ sont exacts en tout point, donc exacts.

Si s s'annule en un point $x \in X$, trivialisons E sur un voisinage de x avec une base $e_1, \dots, e_r$. Notons $s = \sum f_i e_i$. Les $e_i = e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_r$ forment une base de $\wedge^{r-1} E$. Dans $K_+(E, s)$ la dernière flèche $\wedge^{r-1} E \rightarrow \wedge^r E$ est donnée par $\sum u_i e_i \mapsto \sum (-1)^{i+1} u_i f_i$. Comme les f_i s'annulent en x , cette application n'est pas surjective et $K_+(E, s)$ n'est pas exact. De même pour son dual $K_-(E, s)$. ■

Proposition : Supposons que X est lisse. Supposons que s s'annule le long d'une sous-variété Z de codimension $r = \text{rang}(E)$ et que s est transverse à la section nulle. Alors $K_-(E, s)$ a un seul faisceau de cohomologie non nul et celui-ci est égal à $\mathcal{O}_Z$, en degré 0. De même $K_+(E, s)$ a un seul faisceau de cohomologie non nul et celui-ci est égal à $\wedge^r E|_Z$, en degré r .

Démonstration : l'hypothèse est que s est une immersion régulière. Algébriquement ceci se traduit ainsi : sur un ouvert qui trivialise E , la section s est donnée par des fonctions $f_1, \dots, f_r$ telles que f_1 est non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_X$ et f_i est non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_X/(f_1, \dots, f_{i-1})$ pour tout i . C'est cela qui garantit qu'on perd une dimension à chaque fois qu'on coupe par une équation f_i .

Le résultat annoncé est la théorie du complexe de Koszul, voir Matsumura Th. 16.5. Le résultat pour $K_+(E, s)$ découle de celui pour $K_-(E, s)$ en utilisant l'isomorphisme $K_- \simeq K_+ \otimes \wedge^r E^*[r]$. Pour $K_-(E, s)$ on ne va pas refaire toute la théorie du complexe de Koszul mais on va calculer deux groupes de cohomologie histoire de « sentir » ce qu'il se passe :

- Le dernier morphisme $i_s : E^* \rightarrow \mathcal{O}_X$ est l'évaluation $\varphi \mapsto \varphi(s)$. Localement, son image est l'idéal engendré par les fonctions composantes de s de sorte que le conoyau est $\mathcal{O}_X/(f_1, \dots, f_r)$, le faisceau des fonctions sur Z . C'est le groupe de cohomologie recherché.
- L'avant-dernier morphisme $i_s : \wedge^2 E^* \rightarrow E^*$ s'exprime ainsi : localement on choisit une base $e_1, \dots, e_r$ de E , on écrit $s = \sum f_i e_i$, on a la base des $e_i^* \wedge e_j^*$ pour $\wedge^2 E^*$, alors le morphisme envoie $e_i^* \wedge e_j^*$ sur $f_j e_i^* - f_i e_j^*$.

Détail : la forme $i_s(e_i^* \wedge e_j^*)$ envoie e_k sur $(e_i^* \wedge e_j^*)(e_k \wedge s)$. Or

$$e_k \wedge s = \sum_{s < k} -f_s e_s \wedge e_k + \sum_{s > k} f_s e_k \wedge e_s. \text{ Donc on trouve } \delta_{ki} f_j - \delta_{kj} f_i, \text{ qui est la valeur de } f_j e_i^* - f_i e_j^* \text{ en } e_k.$$

C'est là que l'hypothèse que la suite f_i est régulière intervient. On veut vérifier que si $\sum a_i f_i = 0$ alors $\sum a_i e_i^*$ est dans l'image de i_s . Faisons le cas $r = 2$ donc $a_1 f_1 + a_2 f_2 = 0$:

- comme $f_2 \nmid 0 \bmod f_1$, il existe b tel que $a_2 = b f_1$, donc $(a_1 + b f_2) f_1 = 0$.
- comme $f_1 \nmid 0$ on trouve $a_1 + b f_2 = 0$.

Finalement $a_1 e_1^* + a_2 e_2^* = -b f_2 e_1^* + b f_1 e_2^* = i_s(-b \cdot (e_1^* \wedge e_2^*))$. ■

Remarque : le même résultat est vrai plus généralement pour un morphisme lisse $X \rightarrow S$, un fibré vectoriel $E \rightarrow X$ de rang r , une section $s : X \rightarrow E$ dont l'ensemble d'annulation Z est lisse sur S , et qui est transverse à la section nulle.

4. Première étape de la méthode de Cayley

On a obtenu ce qui suit.

Soit $X \subset \mathbb{P}(V^*)$ une variété projective lisse. Soit $L = \mathcal{O}_X(1)$ et $E = J(L)$. Les résultats ci-dessus montrent :

Corollaire : un vecteur $f \in V$ représente un point de la duale $X^\vee$ si et seulement si l'un quelconque des complexes suivants n'est pas exact :

- $K_+(J(L), j(f))$,
- $K_-(J(L), j(f))$.