UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HAX502X **Année 2024-2025**
Calcul différentiel et équations différentielles

Examen — Première session

Un peu de théorie

1. On suppose $f : U \subset E \to F$ différentiable en a. Démontrer que $\partial_v f(a)$ existe, et donner son expression en fonction de la différentielle de f en a.
2. Soit $f : U \subset E \to F$ un difféomorphisme de U sur $f(U)$. On note $g : f(U) \to E$ son inverse. Démontrer la formule exprimant $dg(f(x))$ en fonction de $df(x)$, pour $x \in U$.

On suppose $f : U \subset E \to F$ différentiable sur l'ouvert U. On considère, sur $L(E, F)$, la norme triple $|||\cdot|||$ associée à des normes fixées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ sur E et F. Soit $C \in \mathbb{R}_+$.

3. On suppose d'abord que f est C-Lipschitzienne sur U, montrer que pour tout $x \in U$, $|||df(x)||| \leq C$.
4. Montrer que, si U est convexe, et pour tout $x \in U$, $|||df(x)||| \leq C$, alors f est C-Lischitzienne.
5. Donner un exemple de fonction $f : U \subset E \to F$, différentiable sur un ouvert non convexe U, qui ne soit pas C-Lischitzienne sur U mais telle que pour tout $x \in U$, $|||df(x)||| \leq C$.

Fonctions implicites

Soit C la courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0.$$

6. Énoncer le théorème des fonctions implicites pour une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
7. Montrer que, au voisinage du point $(0, 0)$, l'ordonnée y d'un point de C est définie implicitement comme une fonction, de classe C^∞, de x. On note φ une telle fonction.
8. Calculer les dérivées première et seconde de φ en 0.
9. Donner l'allure de la courbe C au voisinage du point $(0, 0)$.

Descente le long du gradient

On considère l'espace $\mathbb{R}^p$, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée. On rappelle que, pour une fonction différentiable $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, le gradient $\nabla F(x)$ de F en x est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ défini par

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \qquad dF(x)(v) = \langle \nabla F(x), v \rangle$$

Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive, c'est-à-dire telle que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. Soit $b \in \mathbb{R}^p$. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{2} - \langle b, x\rangle$$

10. Démontrer que F est différentiable, et que $\nabla F(x) = Ax - b$.
11. Démontrer que F est deux fois différentiable, et que $d^2F(x)(v, w) = \langle Av, w\rangle$.
12. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^p$ est un point critique de F, alors F atteint un minimum global en x.

On suppose maintenant qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

13. Montrer que, dans ce cas, la fonction F atteint son minimum global en un unique point de $\mathbb{R}^p$ noté x_m.

On souhaite, dans la suite du problème, obtenir une manière dynamique d'approcher ce minimum, sans le connaître a priori. On pose $f = \nabla F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ et on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

pour une condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^p$.

14. Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution globale, notée u.

On va montrer que $u(t)$ converge vers x_m quand $t \to +\infty$. On considère pour cela la fonction $h = F \circ u$.

15. Montrer que h est dérivable, et que $h'(t) = -\|u'(t)\|^2$ pour $t \in \mathbb{R}$. Quel est le sens de variation de h ?
16. Montrer que h est deux fois dérivable, et que $h''(t) = 2\langle Au'(t), u'(t)\rangle$.
17. Montrer que la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = h'(t)e^{2\alpha t}$ est croissante.
18. En déduire que $\|u'(t)\| \leq e^{-\alpha t}\|f(y_0)\|$ pour tout $t \geq 0$.
19. Montrer que, pour $0 \leq s \leq t$,

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \frac{\|f(y_0)\|}{\alpha}(e^{-\alpha s} - e^{-\alpha t})$$

20. Montrer que la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $x_\infty \in \mathbb{R}^p$.
21. Montrer que $u(t)$ converge vers x_∞.
22. Montrer que $f(x_\infty) = 0$, puis que $x_\infty = x_m$.
