UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HAX502X **Année 2023-2024**
Calcul différentiel et équations différentielles

DM pour le 2 octobre : Chute avec frottements

discussions entre étudiants encouragées

rédaction individuelle soignée requise

On considère la chute verticale d'un corps soumis uniquement à la gravité, dans un fluide et des conditions telles que les frottements soient quadratiques : proportionnels au carré de la vitesse. D'après les lois de Newton, c'est modélisé par l'équation différentielle

$$v' = g - \frac{k}{m}|v|v$$

où v représente la vitesse du corps dans son déplacement (vers le bas), $g > 0$ est la constante gravitationnelle, $m > 0$ la masse et $k > 0$ le coefficient de frottement. Dans ce cadre, il y a une vitesse limite. Nous allons vérifier cela par une étude qualitative, puis donner les solutions explicites.

On étudie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = g - \frac{k}{m}|y|y \\ y(0) = v_0 \end{cases}$$

avec $v_0 \in \mathbb{R}$. On n'utilisera pas de solution explicite pour les 8 premières questions.

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto g - \frac{k}{m}|x|x$ est localement, Lipschitzienne en espace. *Indication : écrire $f(t, x_1) - f(t, x_2)$ explicitement, traiter différemment les cas $x_1 x_2 \geq 0$ et $x_1 x_2 < 0$.*
2. Justifier qu'il existe une unique solution maximale $v :]c, d[\to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy.
3. Déterminer $v_{\lim}$ telle que, si $v_0 = v_{\lim}$, la solution maximale reste constante.
4. Montrer que, si $v_0 < v_{\lim}$, alors $v(t) < v_{\lim}$ pour tout $t \in]c, d[$.
5. Déterminer le sens de variation de v selon la valeur de la vitesse initiale v_0.
6. Montrer que $d = +\infty$.
7. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} v(t) = v_{\lim}$.
8. Trouver une expression explicite de $v(t)$ pour $t \geq 0$ lorsque $g = \frac{k}{m} = 1$ et $v_0 = 0$.
9. (Facultatif, un peu long) Trouver une expression explicite pour tout $t \in]c, +\infty[$, et pour toute vitesse initiale $v_0 \in \mathbb{R}$.

---

1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(t,x) \mapsto g - \frac{k}{m}|x|x$$

On a
$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| = \left|g - \frac{k}{m}|x_1|x_1 - \left(g - \frac{k}{m}|x_2|x_2\right)\right|$$
$$= \frac{k}{m}\left||x_1|x_1 - |x_2|x_2\right|$$
$$= \begin{cases} \frac{k}{m}|x_1^2 - x_2^2| & \text{si } x_1x_2 \geq 0 \\ \frac{k}{m}|x_1^2 + x_2^2| & \text{si } x_1x_2 < 0 \end{cases}$$

On veut montrer que f est localement Lipschitzienne en espace.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque.
Pour $x_1, x_2 \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, si $x_1x_2 \geq 0$, on a
$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| = \frac{k}{m}|x_1^2 - x_2^2|$$
$$= \frac{k}{m}|x_1+x_2||x_1-x_2| \quad \text{par identité remarquable}$$
$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq \frac{k}{m}(2|x_0|+\varepsilon)|x_1-x_2| \quad \text{car } |x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$$
et $|x_i| \leq \sup\{|x_0-\varepsilon|, |x_0+\varepsilon|\}$
$= |x_0|+\varepsilon$

Maintenant, si $x_1x_2 < 0$, on a
$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \frac{k}{m}|x_1^2 + x_2^2|$$
$$\leq \frac{k}{m}\left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)$$
car $|x_i| \leq |x_0|+\varepsilon$
$$\leq \frac{k}{m}\left((|x_0|+\varepsilon)|x_1| + (|x_0|+\varepsilon)|x_2|\right)$$
$$\leq \frac{k}{m}(|x_0|+\varepsilon)(|x_1|+|x_2|)$$
car x_1 et x_2 ont des signes opposés
$$\leq \frac{k}{m}(|x_0|+\varepsilon)|x_1-x_2|$$

Finalement, pour $\lambda := \max\left(\frac{k}{m}2(|x_0|+\varepsilon), \frac{k}{m}(|x_0|+\varepsilon)\right) = 2\frac{k}{m}(|x_0|+\varepsilon)$, on a pour tout $x_1, x_2 \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$,
$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2|$$

⚠ Certains utilisent $(x_1-x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

c'est très bien, mais il faut bien gérer les inégalités par la suite :

* en général, si $b<0$, on n'a pas $|a+b| \leq |a|$ en général
* si $|a|<M$ et $|b|<K$, on n'a <u>pas</u> $\frac{|a|}{|b|} < \frac{M}{K}$ ⚠ !!

2) La fonction f est continue par opérations sur les fonctions continues usuelles, et elle est localement Lipschitzienne d'après la question 1. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy.

3) Supposons que la solution maximale est constante, alors sa dérivée est nulle, donc $0 = g - \frac{k}{m}|v_{lim}|v_{lim}$.

On a alors $|v_{lim}|v_{lim} = \frac{gm}{k} > 0$, donc $v_{lim} > 0$ et $v_{lim} = \sqrt{\frac{gm}{k}}$.

On vérifie immédiatement que la fonction constante égale à $\sqrt{\frac{gm}{k}}$ est bien solution.

4) On suppose $v_0 < v_{lim}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 \in]c,d[$ tel que $v(t_0) \geq v_{lim}$. Alors par théorème des valeurs intermédiaires, il existe un t_1 entre 0 et t_0 tel que $v(t_1) = v_{lim}$. Dans ce cas, v et la fonction constante égale à v_{lim} sont toutes deux solutions maximales du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = g - \frac{k}{m}|y|y \\ y(t_1) = v_{lim} \end{cases}$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces deux fonctions coincident. En particulier, $v_0 = v(0) = v_{lim}$, une contradiction.

5) Notons, par propriétés des fonctions usuelles et opérations élémentaires, que $x \mapsto |x|x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, on a le tableau de signe suivant pour $g - \frac{k}{m}|x|x$:

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{gm}{k}}$		$+\infty$
$g-\frac{k}{m}\lvert x\rvert x$		$+$	0	$-$	

Si $v_0 < v_{lim}$, par la 4), on a $v(t) < v_{lim} = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ pour $t \in]c,d[$, donc
$v'(t) = g - \frac{k}{m}|v(t)|v(t) > 0$ pour $t \in]c,d[$. Donc v est strictement croissante.

Si $v_0 = v_{lim}$, alors v est constante.

Si $v_0 > v_{lim}$, le même raisonnement qu'à la question 4) montre que $\forall t \in]c,d[$, $v(t) > v_{lim}$, donc $\forall t \in]c,d[$, $v'(t) < 0$.
Donc v est strictement décroissante.

6) Si $v_0 < v_{lim}$, on a $\forall t \in [0,d[$, $v_0 \leqslant v(t) < v_{lim}$ par 4) et 5).
D'après le théorème d'explosion en temps fini, on a forcément $d = +\infty$.

⚠ $\lim\limits_{t\to d} |v(t)| = +\infty$ est différent de $\lim\limits_{t \to d} v(t) = +\infty$. On a donc bien besoin de l'encadrement complet ci-dessus.

Si $v_0 = v_{lim}$, v est la fonction constante égale à v_{lim}, définie sur $\mathbb{R}$.

Si $v_0 > v_{lim}$, les même arguments montrent $\forall t \in [0,d[$, $v_{lim} < v(t) \leqslant v_0$.
Encore une fois, le théorème d'explosion en temps fini assure $d = +\infty$.

7) Si $v_0 = v_{lim}$, le résultat est évident. Comme les deux raisonnements sont analogues pour $v_0 < v_{lim}$ et $v_0 > v_{lim}$, on ne détaille que le cas $v_0 < v_{lim}$.
Dans ce cas, v est croissante et majorée, donc admet une limite $\ell \in]v_0, v_{lim}]$.
Par continuité, on a aussi $\lim\limits_{t \to +\infty} v'(t) = g - \frac{k}{m}|\ell|\ell$.

Supposons $\ell < v_{lim}$. Alors $g - \frac{k}{m}|\ell|\ell > 0$. Par définition de la limite, $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [M, +\infty[$, $v'(t) > \left(g - \frac{k}{m}|\ell|\ell\right)/2$.

En intégrant, on a, pour $t \in [M, +\infty[$,

$$v(t) - v(M) = \int_t^M v'(s)\,ds > (t-M)\,\frac{g - \frac{k}{m}|\ell|\ell}{2}$$

Le terme de droite tends vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$, ce qui contredit $v(t) < v_{lim}$.

En conclusion, $v_{lim} = \ell = \lim_{t \to +\infty} v(t)$.

8) On suppose ici $g = \frac{k}{m} = 1$ et $v_0 = 0$. En particulier, $v_{lim} = \sqrt{\frac{gm}{k}} = 1$.

Par les questions 5) et 4), on a, $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant v(t) < 1$.

On peut donc écrire, pour $t \in [0, +\infty[$,

$$\frac{v'(t)}{1 - (v(t))^2} = 1$$

Par décomposition en éléments simples, et en intégrant entre 0 et t, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\ln(1 + v(t)) - \ln(1 - v(t))\right) = t$$

D'où $\frac{1 + v(t)}{1 - v(t)} = e^{2t}$, soit encore $v(t) = \frac{e^{2t} - 1}{1 + e^{2t}} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \times \frac{2}{e^t + e^{-t}}$

$$= \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

$$= \tanh t$$

9) Supposons encore $g = \frac{k}{m} = 1$ et $v_0 = 1$ pour le moment, cherchons l'expression de v pour $t \leqslant 0$.

On sait que v est croissante, donc $v(t) \leqslant 0$ pour $t \leqslant 0$. On a donc

$$v'(t) = 1 + v(t)^2$$

d'où $\frac{v'(t)}{1 + v(t)^2} = 1$ (on a toujours $1 + |v(t)|^2 > 0$)

On intègre entre 0 et t :

$$\int_0^t \frac{v'(s)}{1+v(s)^2}\,ds = t$$

$$\| $$

$$\Big[\arctan(v(s))\Big]_0^t$$

D'où $\arctan(v(t)) = t + \arctan(v(0)) = t$

En prenant la tangente, on en déduit $v(t) = \tan(t)$ (et $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$).

Finalement, notre solution maximale est la fonction

$$v : \left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \tan(t) & \text{si } t \leqslant 0 \\ \tanh(t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que, pour $t_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, la fonction

$$y : \left]-t_0-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto v(t+t_0)$$

est aussi solution maximale de l'équation différentielle $y' = g - \frac{k}{m}|y|y$, et vérifie la condition initiale $y(0) = v(t_0)$. Comme v établit une bijection entre $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et $]-\infty, 1[$, on a trouvé les solutions maximales pour $v_0 \in]-\infty, 1[$ (on prend $t_0 = \arctan v_0$ si $v_0 < 0$, et $t_0 = \operatorname{argth} v_0$ si $0 < v_0 < 1$)

Il reste à traiter le cas $v_0 > 1$. Alors par les questions précédentes, on a $v(t) > 1$ pour tout $t \in]c, +\infty[$, donc v est solution de $v'(t) = 1 - (v(t))^2$ partout. En intégrant comme plus haut, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+v(t)}{1+v_0} - \ln\frac{v(t)-1}{v_0-1}\right) = t$$

d'où
$$\frac{1+v(t)}{v(t)-1} = e^{2t+\ln\frac{1+v_0}{v_0-1}}$$

$$v(t) = \frac{1+e^{2t+\ln\frac{1+v_0}{v_0-1}}}{e^{2t+\ln\frac{1+v_0}{v_0-1}}-1}$$

$$= \coth\left(t+\frac{1}{2}\ln\frac{1+v_0}{v_0-1}\right)$$

La solution maximale est donc

$$v : \left]-\frac{1}{2}\ln\frac{1+v_0}{v_0-1}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \coth\left(t+\frac{1}{2}\ln\frac{1+v_0}{v_0-1}\right)$$

(on note que $\frac{1+v_0}{v_0-1} > 1$, donc on a bien $0 \in \left]-\frac{1}{2}\ln\frac{1+v_0}{v_0-1}, +\infty\right[$).

Le cas où g et $\frac{k}{m}$ peuvent être différents de 1 peut être résolu de manière similaire, avec un peu plus de notations.