**UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER** — **L3 Mathématiques**
**HAX502X** — **Année 2023-2024**
**Calcul différentiel et équations différentielles**

# Examen final

---

durée 3h
documents et calculatrices interdits
1 point par question
il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir 20

---

**Optimisation**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^2$$

1. Justifier que $f$ est de classe $C^\infty$, et décrire précisément son application différentielle (espace de départ, espace d'arrivée, domaine de définition et image d'un point).
2. Déterminer les points critiques de $f$.

On considère l'ensemble

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

3. Montrer que $f$ admet un maximum et un minimum sur $K$.
4. Déterminer en quels points de $K$ la restriction $f|_K$ de $f$ à $K$ est susceptible d'atteindre un extremum.
5. Déterminer en quels points de $K$ la fonction $f|_K$ atteint son maximum, et en quels points de $K$ elle atteint son minimum.

---

**TFI**

6. Énoncer le théorème des fonctions implicites pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
7. Pour démontrer ce théorème, à quelle fonction faudrait-il appliquer le théorème d'inversion locale ?

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto g(u, v)$ une fonction de classe $C^1$, telle que $g(0, 0) = 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = g(3x^2 - y, xy + x)$$

8. Rappeler la formule pour la différentielle d'une fonction composée.
9. Déterminer la jacobienne de $f$ en fonction des dérivées partielles de $g$.

Soit $C$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par $f$ :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

10. Sous quelle condition sur $g$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites à $f$ en $(0, 0)$ pour exprimer localement $y$ comme une fonction de $x$ ?
11. Dans ces cas là, déterminer la tangente à $C$ en $(0, 0)$, en fonction des dérivées partielles de $g$.

---

**Étude qualitative**

On étudie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = g - \frac{k}{m}y^3 \\ y(0) = v_0 \end{cases}$$

avec $v_0 \in \mathbb{R}$, et $g > 0$, $k > 0$, $m > 0$ fixés.

12. Justifier qu'il existe une unique solution maximale $v : ]c, d[ \to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy.
13. Montrer qu'il existe une unique valeur $v_{\lim} \in \mathbb{R}$ telle que, si $v_0 = v_{\lim}$, la solution maximale $v$ reste constante.
14. Montrer que, si $v_0 < v_{\lim}$, alors pour tout $t$ dans $]c, d[$, $v(t) < v_{\lim}$.
15. Pour $v_0 < v_{\lim}$, déterminer le sens de variation de $v$.
16. Pour $v_0 < v_{\lim}$, montrer que $d = +\infty$.
17. Pour $v_0 < v_{\lim}$, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = v_{\lim}$.

---

**Cauchy-Lipschitz global**

On rappelle le lemme de Grönwall.

> **Lemme de Grönwall :** Soient $d \in \mathbb{R}_+^*$ et $K \in \mathbb{R}$. Soit $y : [0, d[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Soit $z : [0, d[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que
>
> $$\forall t \in [0, d[, \qquad z(t) \leq K + \int_0^t y(s)z(s)ds.$$
>
> Alors on a
>
> $$\forall t \in [0, d[, \qquad z(t) \leq K \exp\left(\int_0^t y(s)ds\right).$$

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : ]a, b[ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction $k : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ continue, à valeurs positives telle que pour tout $t \in ]a, b[$, $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k(t)\|x_1 - x_2\|.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases}$$

18. Justifier qu'il existe une unique solution maximale $u : ]c, d[ \to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy.

On veut montrer que $d = b$. On suppose par l'absurde que $d \in ]a, b[$.

19. Déterminer une constante $C$ telle que pour tout $t \in [0, d[$,

$$\|u(t)\| \leq C + \int_0^t k(s)\|u(s)\|ds$$

20. Appliquer le Lemme de Grönwall à la fonction $\|u(t)\|$.
21. Conclure.
22. Démontrer le lemme de Grönwall.

---

1. La fonction $f$ est polynomiale, donc de classe $C^\infty$.
Sa différentielle est l'application

$$df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$
$$(x,y) \longmapsto df(x,y)$$

où $df(x,y)$ est l'application linéaire représentée par la matrice $J_f(x,y) = \begin{bmatrix} -4xy + 2x & 2y - 2x^2 \end{bmatrix}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$.

2. Le point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de $f$ si et seulement si $df(x,y) = 0$, c'est-à-dire ssi $J_f(x,y) = 0$. On a $-4xy + 2x = 0$ ssi $x = 0$ ou $y = \frac{1}{2}$, et dans ces cas là, on a $y = 0$ ou $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ si l'égalité $2y - 2x^2 = 0$ est aussi satisfaite. Finalement, les points critiques de $f$ sont $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

3. L'ensemble $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq y \leq 2 - x^2\}$ est un fermé car c'est l'intersection des images réciproques du fermé $[0, +\infty[$ par les deux applications continues $(x,y) \longmapsto y + 1$ et $(x,y) \longmapsto 2 - x^2 - y$.
Il est aussi borné : on a clairement $-1 \leq y \leq 2$ pour

$(x,y) \in K$ (car $x^2 \geq 0$), et $2-x^2 \geq -1$, donc $x^2 \leq 3$, donc $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. Ainsi, $K$ est dans la boule fermée de centre $0$ et de rayon $2$ pour la norme $\infty$. Comme $K$ est fermé et borné, c'est un compact de $\mathbb{R}^2$. La restriction $f|_K$ est une fonction continue sur un compact, donc elle atteint son maximum et son minimum.

4. L'ensemble $\mathring{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 2-x^2\}$ est ouvert, donc si $f|_K$ atteint un extremum en un point de $\mathring{K}$, c'est un point critique de $f$ : $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

Si $f|_K$ atteint un extremum sur $K \setminus K^\circ$, alors on a

soit $y = -1$ et $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

soit $y = 2-x^2$ et $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Dans le premier cas, on a en particulier un extremum de la fonction

$$g : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x,-1) = 1 + 3x^2$$

qui peut être atteint en $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ ou en une solution de $g'(x) = 0$, c'est-à-dire de $6x = 0$, c'est-à-dire en $x = 0$.

Dans le deuxième cas, on a en particulier un extremum de la fonction

$$h : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x, 2-x^2) = (2-x^2)^2 - 2x^2(2-x^2) + x^2$$

$$= x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2 + 2x^4 + x^2$$

$$= 3x^4 - 7x^2 + 4$$

qui peut être atteint en $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, ou en une solution de $h'(x) = 0$, c'est-à-dire $12x^3 - 14x = 0$, c'est-à-dire en $x = 0$ ou en $x = \pm\sqrt{\frac{14}{12}} = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}$.

5. Finalement, on doit comparer les valeurs de $f$ aux points $(x, y)$ suivants :

$$f\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0,-1) = 1$$

$$f(\pm\sqrt{3}, -1) = 1 + 2 \times 3 + 3 = 10$$

$$f\left(\pm\sqrt{\tfrac{7}{6}}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{36} - 2\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \frac{25 - 70 + 42}{36} = \frac{-3}{36} = \frac{-1}{12}$$

$$f(0,2) = 4$$

6. Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Le théorème des fonctions implicites du cours dit que, si $f$ est de classe $C^k$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $f(a,b) = 0$, et l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longmapsto df(a,b)(0,h) \end{array}$

est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $V$ de $(a,b)$ dans $U$, un voisinage ouvert $W$ de $a$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : W \to \mathbb{R}$ de classe $C^k$ tels que :

$$\begin{cases} (x,y) \in V \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in W \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

7. Pour démontrer le TFI ci dessus, il faut appliquer le théorème d'inversion locale à la fonction $\begin{array}{l} g : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x, f(x,y)) \end{array}$

8. La différentielle d'une fonction composée $g \circ h$ en $a$ s'écrit :

$$d(g \circ h)(a) = dg(h(a)) \circ dh(a).$$

9. Soit $\begin{array}{l} h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (3x^2 - y, xy + x) \end{array}$. C'est une fonction de classe $C^\infty$ car polynomiale. Par composition, $f = g \circ h$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et

$$J_f(x,y) = J_g(h(x,y))\, J_h(x,y)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(3x^2-y, xy-x) & \frac{\partial g}{\partial v}(3x^2-y, xy-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ y+1 & x \end{bmatrix}$$

$$= \Big[ 6x \frac{\partial g}{\partial u}(3x^2-y, xy-x) + (y+1)\frac{\partial g}{\partial v}(3x^2-y, xy-x) \quad -\frac{\partial g}{\partial u}(3x^2-y, xy-x) + x\frac{\partial g}{\partial v}(3x^2-y, xy-x) \Big]$$

10. Par composition, $f$ est de classe $C^1$. On a $f(0,0) = g(0,0) = 0$, et l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \longmapsto df(0,0)(0,h) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \times h$ est inversible ssi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$. En terme de $g$, ça s'écrit, d'après la question 9,

$$-\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) \neq 0.$$

Par le TFI, il existe $V$ voisinage ouvert de $(0,0)$,
$W$ voisinage ouvert de $0$,
$\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction de classe $C^1$

tels que $\begin{cases} (x,y) \in V \\ (x,y) \in C \end{cases} \iff \begin{cases} x \in W \\ y = \varphi(x). \end{cases}$

11. Comme $C$ est localement le graphe de $\varphi$, sa tangente est donnée par $y = \varphi(0) + \varphi'(0)x$. Par le TFI, on a directement $\varphi(0) = 0$. Pour calculer $\varphi'(0)$, on dérive

$$f(x, \varphi(x)) = 0,$$ ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$$

et en $(0,0)$,

$$\varphi'(0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)}{-\frac{\partial g}{\partial u}(0,0)}$$

Finalement, la tangente en $(0,0)$ à $C$ est la droite d'équation $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0)\, y - \frac{\partial g}{\partial v}(0,0)\, x = 0$, donc la droite orthogonale au gradient de $g$ en $(0,0)$.

12. L'équation différentielle est définie par l'application

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, x) \longmapsto g - \frac{k}{m} x^3$$

qui est de classe $C^1$, donc localement Lipschitzienne.
Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, et il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy.

13. La solution maximale $v$ est constante ssi $v'(t)=0$ pour tout $t\in ]c,d[$, c'est-à-dire $g-\frac{k}{m}v(t)^3=0$.
Or l'équation $g-\frac{k}{m}x^3$ a une unique solution réelle donnée par $v_{lim}=\left(\frac{gm}{k}\right)^{1/3}$. (Réciproquement, la fonction constante égale à $v_{lim}$ est bien sûr solution au pbm de Cauchy avec $v_0=v_{lim}$).

14. On suppose $v_0<v_{lim}$. Alors pour tout $t\in ]c,d[$, $v_0<v_{lim}$. En effet, sinon, par TVI, il existe $t_0\in ]c,d[$ tel que $v(t_0)=v_{lim}$. Dans ce cas, $v$ et la fonction constante égale à $v_{lim}$ sont solution du même pbm de Cauchy

$$\begin{cases} y'=g-\frac{k}{m}y^3 \\ y(t_0)=v_{lim} \end{cases}$$

donc par unicité, $\forall t\in ]c,d[, v(t)=v_{lim}$. Ça contredit $v(0)=v_0<v_{lim}$.

15. Comme $x\mapsto g-\frac{k}{m}x^3$ est strictement décroissante, on a

$$\forall t\in ]c,d[,\quad v'(t)=g-\frac{k}{m}(v(t))^3>g-\frac{k}{m}(v_{lim})^3=0$$

donc $v$ est strictement croissante.

16. Comme $v$ est strictement croissante et $\forall t\in ]c,d[, v(t)<v_{lim}$, on a $\lim\limits_{t\to d} v(t)$ existe et est inférieure ou égale à $v_{lim}$.

Par le théorème d'explosion en temps fini, on a donc $d = +\infty$.

17. Notons $\ell := \lim_{t \to +\infty} v(t) \leqslant v_{\ell im}$ par la question précédente. Comme $v'(t) = g - \frac{k}{m}(v(t))^3$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} v'(t) = g - \frac{k}{m}\ell^3 \geqslant 0.$$

Supposons $g - \frac{k}{m}\ell^3 > 0$, alors il existe $T > 0$ tel que, $\forall t \geqslant T$, $v'(t) > \frac{g - \frac{k}{m}\ell^3}{2} > 0$.

Par intégration,

$$v(t) > v(T) + \frac{g - \frac{k}{m}\ell^3}{2}(t - T)$$

et par passage à la limite $v_{\ell im} \geqslant +\infty$, une contradiction.

Donc $g - \frac{k}{m}\ell^3 = 0$, et $\ell = \left(\frac{mg}{k}\right)^{1/3} = v_{\ell im}$.

18. Soit $(t_0, x_0) \in ]a, b[ \times \mathbb{R}^n$, et $\varepsilon > 0$ tel que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset ]a, b[$. La fonction $k$ est continue, donc sa restriction à $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ est bornée et atteint ses bornes. Soit $\lambda := \max_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} k(t)$. Alors on a :

$\forall t \in ]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ , $\forall x_1, x_2 \in B(x_0,\varepsilon)$ ,

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \leqslant k(t)\,\|x_1-x_2\| \leqslant \lambda\,\|x_1-x_2\|.$$

On a montré que $f$ est localement, Lipschitzienne en espace. De plus, $f$ est continue par hypothèse, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy.

19. On a, pour $t \in [0,d[$,

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds \\ &= x_0 + \int_0^t f(s,u(s))\,ds \\ &= x_0 + \int_0^t f(s,u(s)) - f(s,0)\,ds + \int_0^t f(s,0)\,ds \end{aligned}$$

donc, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leqslant \|x_0\| + \int_0^t \|f(s,u(s))-f(s,0)\|\,ds + \int_0^t \|f(s,0)\|\,ds \\ &\leqslant \|x_0\| + \int_0^t k(s)\,\|u(s)\|\,ds + \int_0^d \|f(s,0)\|\,ds \end{aligned}$$

où la dernière intégrale est un réel fixé, car $f$ est continue sur $]a,b[\times\mathbb{R}^n$ qui contient $[0,d]\times\{0\}$.

En prenant $C = \|x_0\| + \int_0^d \|f(s,0)\| ds$, on a le résultat.

20. Par le lemme de Grönwall on a, pour $t \in [0,d[$,

$$\|u(t)\| \leqslant C \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right)$$

21. En particulier, on a, $\forall t \in [0,d[$, $\|u(t)\| \leqslant C \exp\left(\int_0^d k(s) ds\right)$ qui est fini, ce qui contredit la conclusion du théorème d'explosion en temps fini : $\lim\limits_{t \to d} \|u(t)\| = +\infty$.

Donc $d = b$.

22. Voir dans le poly de CM.