Outils Mathématiques 2 – Examen – Session 1

Durée : 2h

Calculatrices et documents interdits.
La rédaction précise des arguments et des résultats fait partie de l'évaluation.
Les notations du cours doivent être utilisées autant que possible.
Barème indicatif : 5 points par exercice

Exercice 1. (Les questions sont indépendantes.)

1. Calculer les dérivées partielles premières pour $f(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$
2. Calculer les dérivées partielles secondes pour $f(x, y) = xy + x^3 + 3\sin(y)$
3. Déterminer la différentielle de la fonction définie par $f(x, y) = \sin(\ln(x^2 + y^2))$
4. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction définie par $f(x, y) = xg(xy)$ où g est une fonction dérivable inconnue.

Exercice 2. On considère la forme différentielle

$$\omega_{(x,y)} = (x^2 - 4y^2)\mathbf{dx} + 12xy\mathbf{dy}$$

et le segment $\mathcal{C}$ de point de départ $(0, 3)$ et de point d'arrivée $(4, 1)$.

1. Déterminer si la forme ω est fermée.
2. Déterminer si la forme ω est exacte.
3. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \omega$.

Exercice 3. On considère la forme différentielle

$$\omega_{(x,y)} = (1 + 2x^2 + xy)e^{x^2+xy}\mathbf{dx} + x^2 e^{x^2+xy}\mathbf{dy}$$

et le segment $\mathcal{C}$ de point de départ $(-1, 1)$ et de point d'arrivée $(1, -1)$.

1. Déterminer si la forme ω est fermée.
2. Déterminer si la forme ω est exacte.
3. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \omega$.

Exercice 4. On considère un gaz à quantité de matière fixée, avec une équation d'état qui relie sa température T, sa pression P et son volume V. En particulier, sa pression P est donnée par une fonction $P = b(T, V)$ de deux variables (la température et le volume) définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (la température et le volume étant positifs). L'entropie du gaz S est une fonction d'état, c'est-à-dire donnée par une fonction $S = a(T, V)$ de ces mêmes deux variables. On considère le coefficient de dilatation isotherme défini par

$$\ell = T\frac{\partial a}{\partial V}(T, V)$$

et le coefficient de compression isochore

$$\beta = \frac{1}{b(T, V)}\frac{\partial b}{\partial T}(T, V)$$

On admet que la forme différentielle définie par

$$a(T, V)\mathbf{dT} + b(T, V)\mathbf{dV}$$

est exacte, et on la note $-dF$ (la fonction d'état F désigne l'énergie libre du gaz, mais il n'est pas nécessaire de connaître quoi que ce soit dessus).

1. Déterminer le coefficient β pour un gaz parfait, c'est-à-dire qui vérifie une équation d'état de la forme $PV = kT$ pour une constante strictement positive k.
2. Dans cette question, on ne suppose plus que le gaz est parfait. Démontrer la première relation de Clapeyron
$$\ell = T\frac{\partial b}{\partial T}(T, V)$$
Indication : on pourra commencer par démontrer la relation $\frac{\ell}{T} = P\beta$.
3. Déterminer le coefficient ℓ pour un gaz parfait.
4. (bonus) Soit T_0 une température fixée. Déterminer la fonction partielle $F_{T=T_0}$ de l'énergie libre d'un gaz parfait, à une constante près.