



UNIVERSITÉ DE
MONTPELLIER



FACULTÉ DES SCIENCES
DE MONTPELLIER

HAS102X

Outils Mathématiques 2

Thibaut Delcroix
bureau 308, Batiment 9
thibaut.delcroix@umontpellier.fr

2025-2026

Table des matières

1	Fonctions de deux variables	2
2	Dérivées partielles	9
3	Formes différentielles	21
4	Dérivées partielles secondes	33
5	Intégrale le long d'un chemin	39
6	Cas des formes exactes	47
7	Le point de vue des champs de vecteurs	51
8	Complément hors programme : le Théorème de Green	56

1 Fonctions de deux variables

1.1 Graphe d'une fonction de deux variables

Définition 1.1. Soit U un domaine du plan \mathbb{R}^2 , sur lequel on note les coordonnées (x, y) . Une **fonction de deux variables** définie sur U est une application

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

qui à tout point (x, y) dans U associe un unique nombre réel $f(x, y)$. La partie U est appelée le **domaine de définition** de la fonction f .

Dans ce cours, on se placera le plus souvent dans ce cadre mathématique abstrait où x , y et $f(x, y)$ sont des grandeurs sans unités, et $f(x, y)$ s'exprime par une formule mathématique faisant intervenir des fonctions usuelles, éventuellement des constantes ou paramètres désignés par des lettres, et les variables x et y . Le domaine de définition U sera alors le plus grand domaine de \mathbb{R}^2 pour lequel la formule a un sens.

Exemple 1.2.

- La fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est définie sur \mathbb{R}^2 tout entier, on prend donc $U = \mathbb{R}^2$.
- La fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{x} + y$ n'est définie que pour x positif, on peut écrire $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.
- La fonction définie par $f(x, y) = \ln(|x - y|)$ est définie sur tout \mathbb{R}^2 sauf sur la droite $y = x$, car on ne peut pas prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul. Donc le domaine de définition de f est le complémentaire de cette droite dans \mathbb{R}^2 .

Dans le cadre d'applications de ces outils mathématiques, les variables x et y porteront souvent d'autres noms ou auront des unités, et le domaine de définition pourra être plus petit, pour ne contenir que les plages de valeurs auxquelles on s'intéresse (par exemple, celles qui ont un sens physique, celles qu'on peut observer).

Exemple 1.3. Si je m'intéresse à la température en France, mon domaine U sera la surface de la France dans une carte de la France (en deux dimensions), et les coordonnées (x, y) seront par exemple pour x la distance en km vers l'Est de Paris, et pour y la distance en km vers le Nord de Paris. Le fonction f associe à un endroit en France à x km à l'Est et y km au Nord de Paris la température $f(x, y)$ à cet endroit, exprimé en degré Celsius.

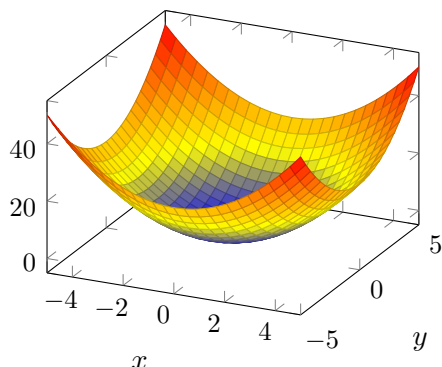
Exemple 1.4. Pour prévoir la météo, on utilise de manière essentielle la pression au niveau de la mer sur toute la surface du globe terrestre. On peut la considérer comme une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ où U est le planisphère, x et y sont la latitude et la longitude, et $f(x, y)$ est la pression en Pascal.

Exemple 1.5. Les variables x et y ne représentent pas nécessairement une position : elles peuvent représenter des variables physiques d'un système (par exemple, la pression, le volume), ou le temps (on va voir des exemples très vite).

Définition 1.6. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le **graphe de f** , noté \mathcal{G}_f , est la partie de \mathbb{R}^3 formée des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$. On note

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &:= \{(x, y, z) \mid (x, y) \in U \text{ et } z = f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \end{aligned}$$

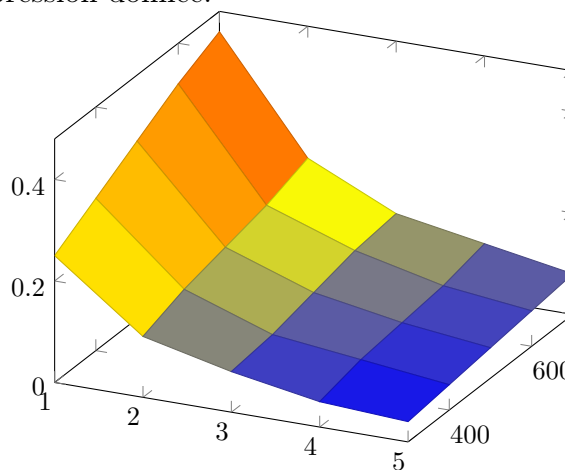
Exemple 1.7. Pour la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$, le graphe de f est l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z = x^2 + y^2$. On obtient ainsi une sorte de cuvette infinie dont chaque tranche verticale est une parabole. Une telle surface s'appelle un parabolôide de révolution¹.



On peut tracer un graphe d'une fonction de deux variables comme on le fait pour une fonction d'une variable, à partir d'un tableau de valeurs.

Exemple 1.8. Par exemple, à partir d'un tableau de vapeur surchauffée, qui indique le volume massique de la vapeur d'eau à une température et pression donnée.

T(°C) \ P(MPa)	1	2	3	4	5
300	.25	.12	.08	.05	.04
400	.30	.15	.09	.07	.05
500	.35	.17	.11	.08	.06
600	.40	.19	.13	.09	.07
700	.44	.22	.14	.11	.08



Attention cependant, quand on représente le graphe, qui est une partie de \mathbb{R}^3 , sur une feuille ou un tableau, on le fait sur un espace de dimension 2, et on introduit des ambiguïtés! Plusieurs point du graphe peuvent être représentés par le même point du plan par exemple, ou alors il est difficile de lire les coordonnées d'un point. On peut lever en partie ces ambiguïtés en utilisant un gradient de couleurs, ou sur un écran, en autorisant des rotations du graphe.

Le graphe d'une fonction est toujours une surface de l'espace \mathbb{R}^3 . Attention, cependant, au fait que toute surface n'est pas forcément le graphe d'une fonction...

1. Cette surface peut aussi s'obtenir en faisant tourner le graphe de la fonction d'une variable $y \mapsto y^2$ autour de l'axe des z .

1.2 Courbes de niveau

Les courbes de niveau (ou lignes de niveau) donnent un autre outil pour se représenter une fonction de deux variables.

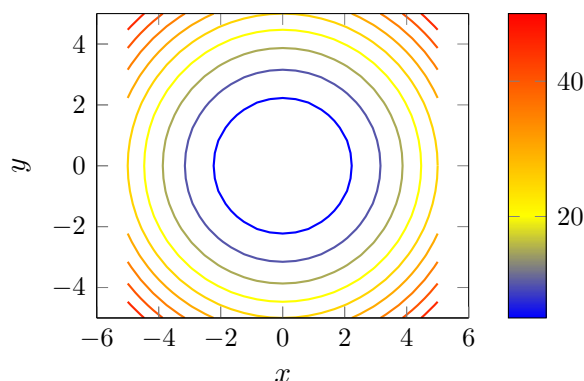
Définition 1.9. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $z_0 \in \mathbb{R}$, la **courbe de niveau** z_0 de f , notée \mathcal{C}_{z_0} , est la partie du plan \mathbb{R}^2 définie par :

$$\mathcal{C}_{z_0} := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = z_0\}.$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des points (x, y) de U pour lesquels f prend la valeur z_0 . On notera aussi parfois cet ensemble $f^{-1}(z_0)$.

Exemple 1.10. Pour la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$, si $z_0 \in \mathbb{R}$, la courbe de niveau \mathcal{C}_{z_0} est donnée, dans le plan des (x, y) , par l'équation :

$$x^2 + y^2 = z_0.$$



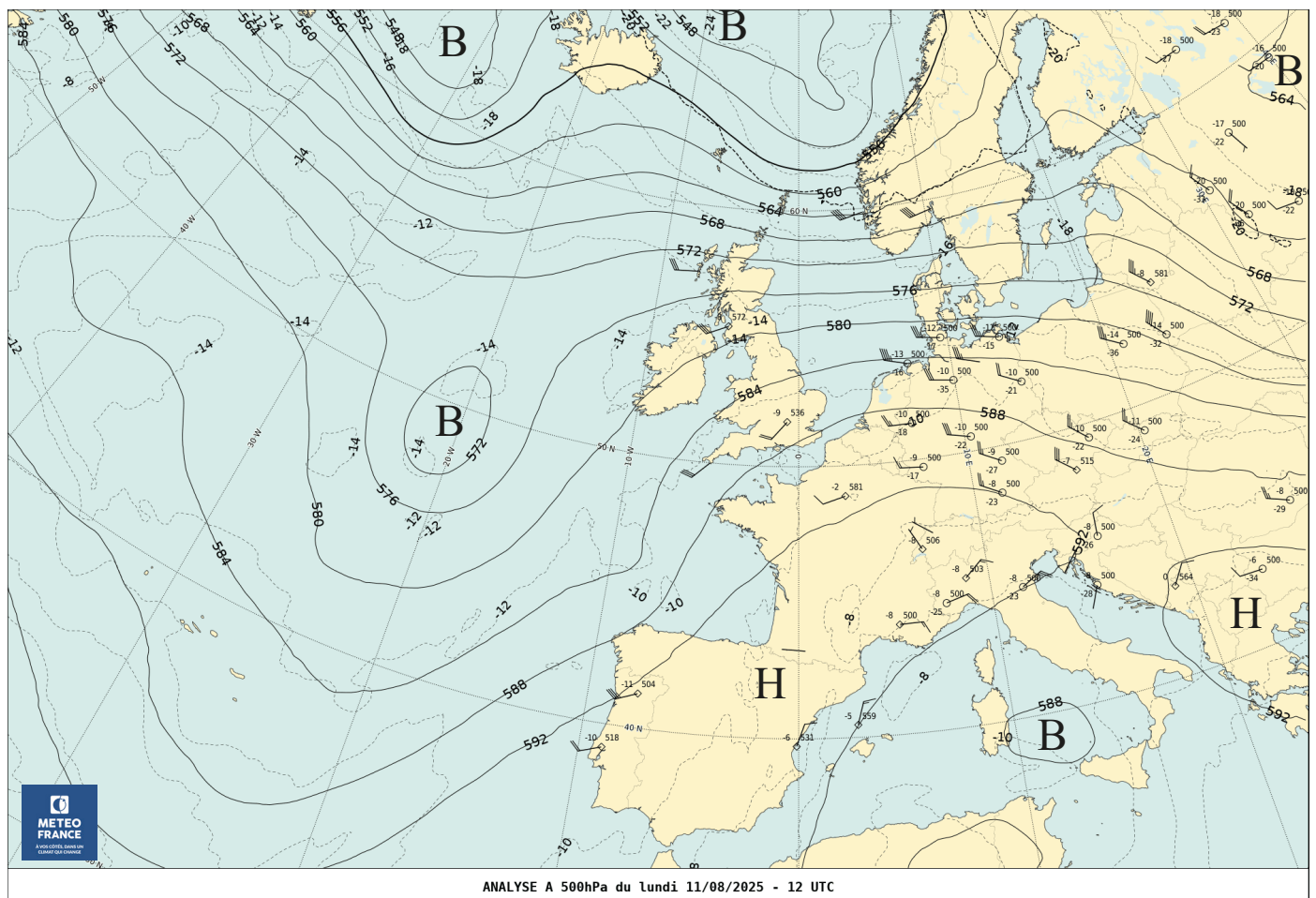
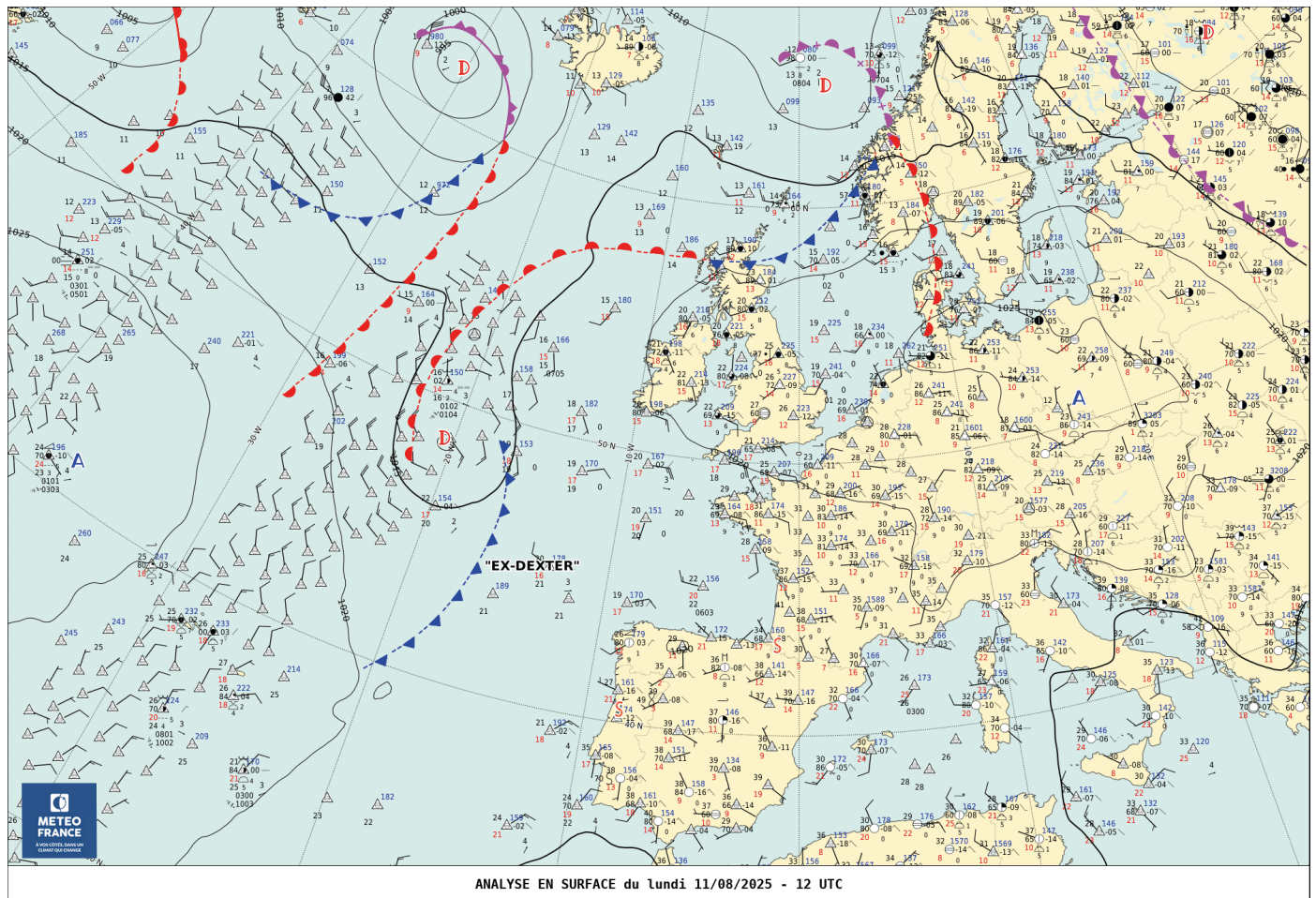
Notons $C(0, r)$ le cercle de centre l'origine $(0, 0)$ et de rayon r . On a alors :

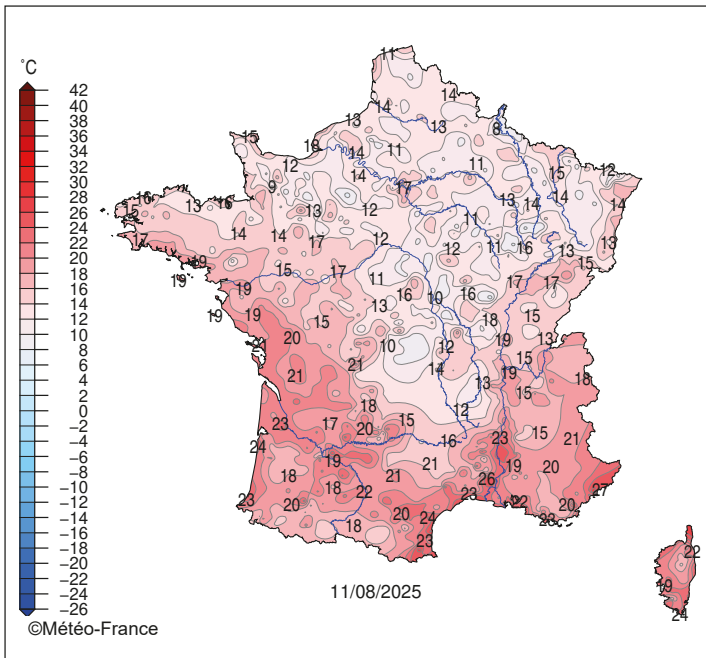
$$\mathcal{C}_{z_0} = \begin{cases} C(0, \sqrt{z_0}) & \text{si } z_0 > 0 \\ \{(0, 0)\} & \text{si } z_0 = 0 \\ \emptyset & \text{si } z_0 < 0 \end{cases}$$

Autrement dit, les courbes de niveau de f donnent ici une famille de cercles concentriques. Ceci n'est pas sans rappeler les cartes IGN où sont dessinées les courbes des points d'altitude constante : ce sont exactement les courbes de niveau de la fonction "altitude", fonction dont le domaine de définition U est la carte en question.

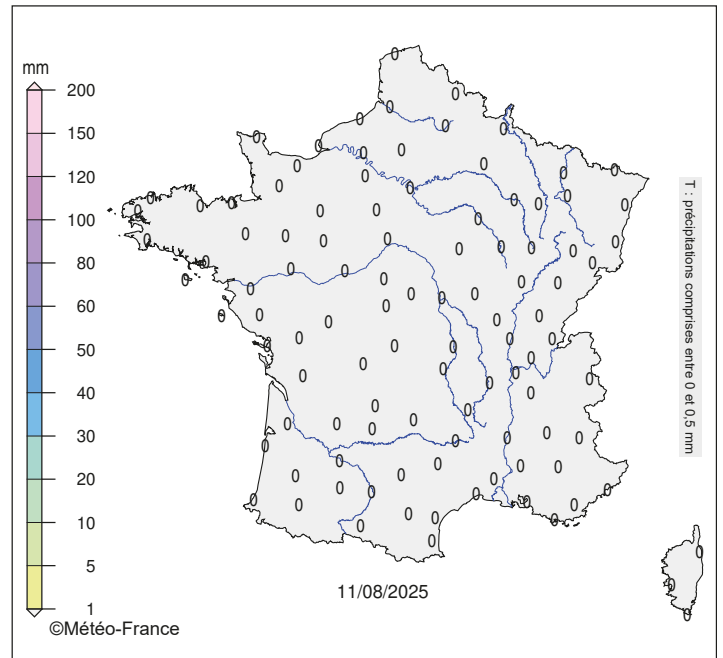
Exemple 1.11. Dans un bulletin météo, la température et la pression sont en général représentées par leurs lignes de niveau. On indique en plus des valeurs particulières pour les températures dans les grandes villes. Voir sur les pages suivantes un exemple de bulletin quotidien.

Bulletin Climatique Quotidien du lundi 11 août 2025

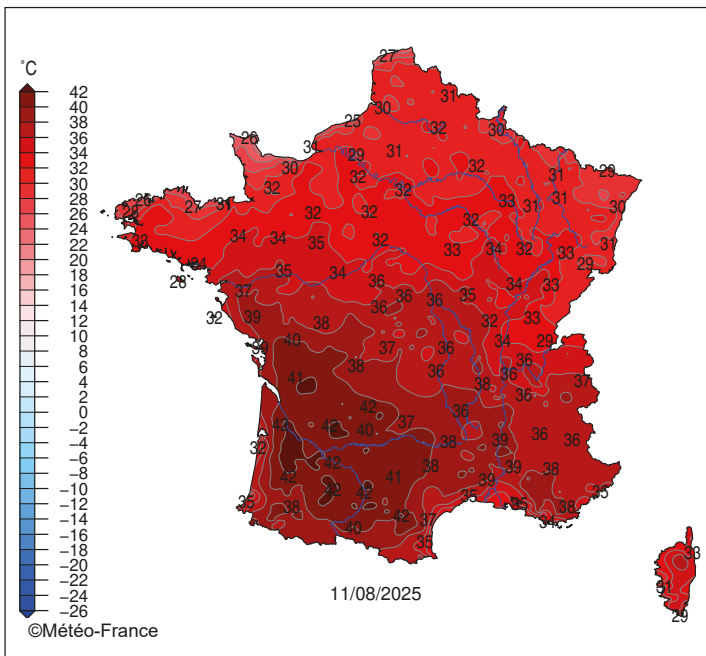




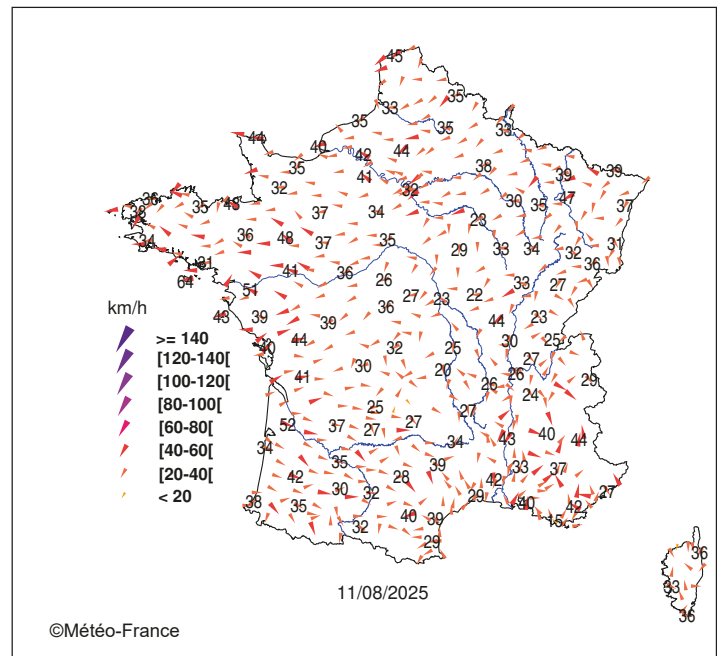
Températures minimales (en degrés C)



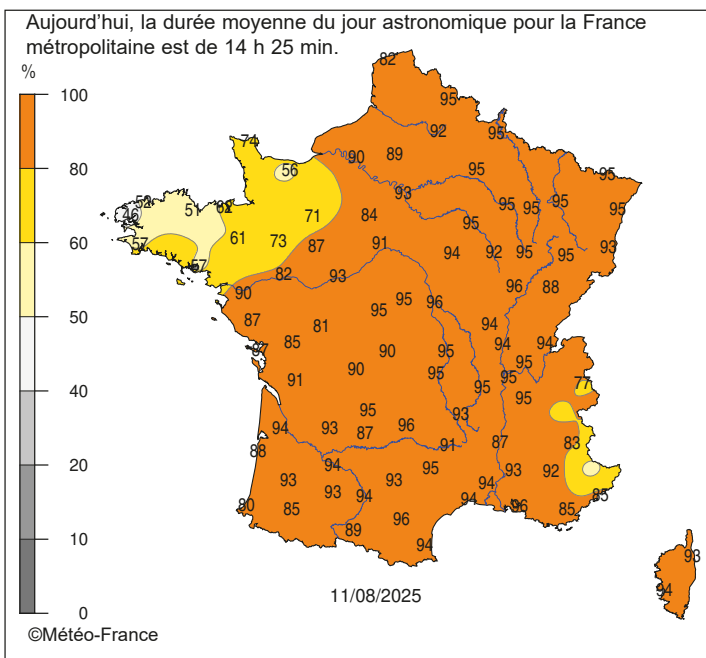
Précipitations en 24 heures, de 06H UTC J à 06H UTC J+1 (en mm)



Températures maximales (en degrés C)



Vent instantané maximal (en km/h)



Fraction d'insolation en %

Lundi 11 août : en altitude, une dorsale, s'étend du Maroc à la Suisse et dirige un flux de sud-ouest faisant remonter une masse d'air très chaude et sèche sur la France. En surface, le pays est sous l'influence d'un vaste et puissant anticyclone centré sur la Pologne. La vague de chaleur qui a débuté le 8 se poursuit et la journée est caniculaire sur une grande partie du pays, en particulier sur le Sud-Ouest.

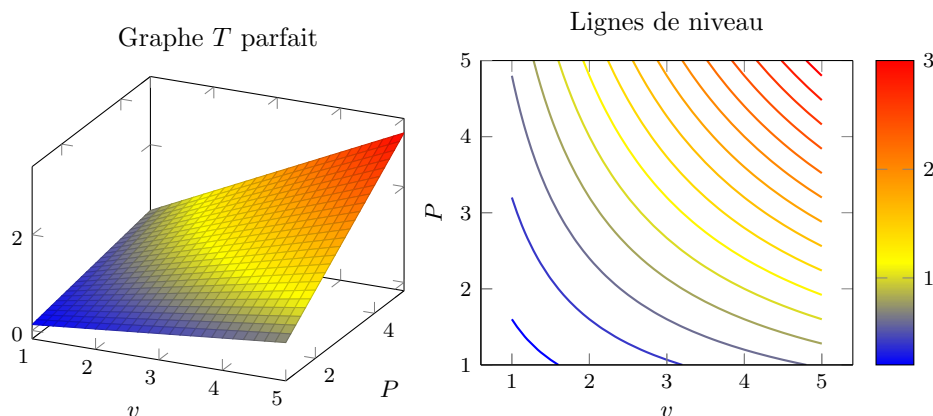
En fin de nuit et matinée, quelques ondes circulent sur la Bretagne sous un ciel nuageux. Elles sont localement orageuses sur la pointe du Finistère. Sur le reste du territoire, le soleil domine largement dès le lever du jour et brille tout au long de la journée. Des nuages bourgeonnent sur le relief alpin et pyrénéen et donnent quelques averses orageuses sur les Pyrénées côté espagnol et sur les Alpes du Sud en fin d'après-midi. Quelques ondes se déclenchent du Poitou aux Pays de la Loire et à la Normandie en fin de journée et début de nuit suivante puis se décalent sur les Hauts-de-France en seconde partie de nuit. Elles s'accompagnent de coups de tonnerre par endroits. En cours de nuit suivante, des ondes isolées touchent également le littoral landais tandis que des nuages bas s'étendent sur la Bretagne puis les Pays de La Loire. Les cumuls de précipitations dépassent rarement 1 mm excepté localement sur les Hautes-Alpes et les Alpes-de-Haute-Provence où ils atteignent très ponctuellement 9 mm à Jausiers (04 - Alt. 1240 mètres).

Les températures minimales sont généralement 2 à localement 6 °C au-dessus des normales du sud de la Bretagne aux Pyrénées et aux Alpes mais souvent 1 à 4 °C en dessous sur un large quart nord-est. Les maximales sont supérieures aux normales de 3 à 10 °C au nord et à l'est de la Loire ainsi que sur la côte aquitaine, le littoral méditerranéen et la Corse et de 10 à 14 °C sur un large quart sud-ouest. Le mercure dépasse souvent 40 °C sur la Nouvelle-Aquitaine et l'ouest de l'Occitanie atteignant 42.9 °C au Montat (46). De nombreux records mensuels de chaleur sont battus, voire des records tous mois confondus avec 38.4 °C à Mende (48), 39.8 °C à Saint-Girons (09), 41.4 °C à Cognac (16), 41.6 °C à Bordeaux (33) ou 42.1 °C à Bergerac (24).

Exemple 1.12. La relation des gaz parfaits

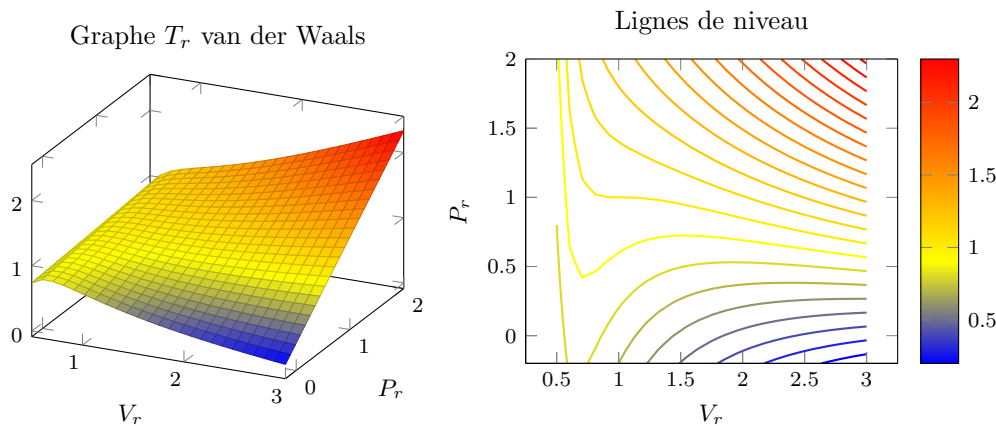
$$PV = nRT$$

permet d'écrire la température absolue T comme une fonction $f(P, v)$ de la pression et du volume molaire $v = \frac{V}{n}$ (ou du volume, si la quantité de matière est fixée). Les lignes de niveau de cette fonction sont alors appelées les **isothermes**. Leur représentation dans le plan de coordonnées P et v est appelé un **diagramme de Clapeyron**.



Exemple 1.13. Une autre équation d'état peut donner des isothermes différentes. Par exemple, l'équation de van der Waals, sous forme réduite, donne :

$$T_r = \frac{3}{8} \left(P_r + \frac{3}{V_r^2} \right) \left(V_r - \frac{1}{3} \right)$$



Remarque 1.14. Lorsque z_0 est dans l'ensemble des valeurs de f , la courbe de niveau z_0 est, comme son nom l'indique, une courbe dans le plan. On peut aussi la voir comme la projection sur le plan des (x, y) de la courbe obtenue par intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'altitude z_0 . Voir l'illustration <https://www.geogebra.org/m/mbkc2ghr>.

1.3 Fonctions partielles

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(a, b) \in U$ un point fixé. On considère les "tranches" du domaine U :

$$U_{x=a} := \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in U\} \quad U_{y=b} := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in U\}.$$

En d'autres termes, un nombre réel y est inclus dans $U_{x=a}$ si et seulement si le point (a, y) est dans le domaine de définition U .

Définition 1.15. Les **fonctions partielles** de f en (a, b) sont les fonctions d'une variable suivantes :

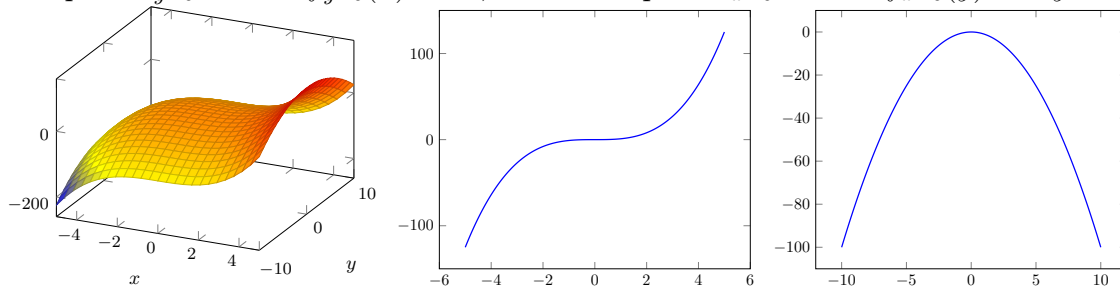
$$f_{x=a} : U_{x=a} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(a, y)$$

$$f_{y=b} : U_{y=b} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, b).$$

Autrement dit, la valeur $f_{x=a}(y)$ de la fonction d'une variable $f_{x=a}$ en y est la même que la valeur $f(a, y)$ de la fonction de deux variables f en (a, y) .

Le graphe de $f_{x=a}$ s'obtient en fixant la première variable à a , c'est à dire en coupant le graphe de f par le plan vertical $x = a$. Le graphe de $f_{y=b}$ s'obtient en fixant la seconde variable à b , c'est à dire en coupant le graphe de f par le plan vertical $y = b$. Voir l'illustration <https://www.geogebra.org/m/z7x4pfnp>.

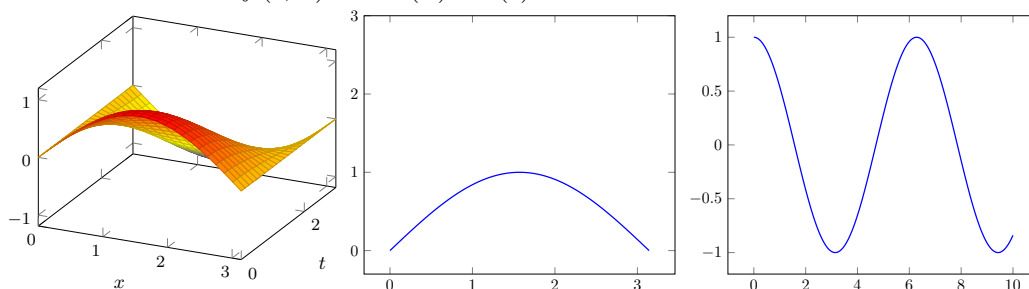
Exemple 1.16. Pour la fonction définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 - y^2$, au point $(0, 0)$, on a d'une part $U_{y=0} = \mathbb{R}$ et $f_{y=0}(x) = x^3$, et d'autre part $U_{x=0} = \mathbb{R}$ et $f_{x=0}(y) = -y^2$.



Exemple 1.17. On souhaite modéliser une corde de guitare qui vibre. Pour ceci on utilise deux variables : la position sur la corde, donnée par un réel x disons la distance à l'une des extrémités, et le temps t . On s'intéresse à la distance $f(x, t)$ entre un point de la corde et la position de ce point à l'équilibre. Le domaine de définition U correspond au rectangle déterminé par la longueur l de la corde et les temps de départ et de fin t_0 et t_1 de l'intervalle de temps considéré. On note

$$U =]0, l[\times]t_0, t_1[= \{(x, t) \mid 0 < x < l, \quad t_0 < t < t_1\}$$

Fixons (a, b) un point de U . La fonction partielle $f_{t=b}$ encode la distance à l'équilibre de tous les points de la corde au temps b . La fonction partielle $f_{x=a}$ encode quant à elle l'évolution dans le temps de la distance à l'équilibre du point de la corde à distance a de l'origine. Voici une illustration avec $f(t, x) = \sin(x) \cos(t)$.



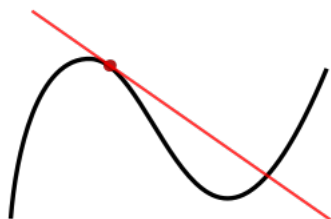
2 Dérivées partielles

2.1 Rappels et/ou spoilers d'OM1 sur la dérivée

On considère d'abord une fonction d'une variable

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t)$$

On rappelle que la **dérivée** de f en t , si elle existe, est la pente de la droite tangente au graphe de f en $(t, f(t))$. C'est un nombre réel qu'on note $f'(t)$, ou parfois $\frac{df}{dt}(t)$. Géométriquement :



Plus formellement, on a

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$

où la définition formelle de limite sera vue en OM1. Géométriquement, ça s'interprète en approchant la tangente par des droites sécantes au graphe. Ce point de vue permet aussi de donner une valeur approximée de la dérivée (en prenant ε aussi petit que possible), et c'est parfois essentiellement la seule chose qu'on peut calculer (si f n'est donnée que par un tableau de valeurs particulières).

Remarque 2.1. Attention, il faut que la tangente ci-dessus existe bien et ne soit pas verticale pour que la dérivée ait un sens. On demande aussi que dans l'ensemble de définition I , on puisse se déplacer "dans les deux sens" en partant de t . Si ce n'est pas le cas, on dit que la fonction n'est pas dérivable en t . Vous verrez ceci plus en détails en OM1.

La dérivée f' de la fonction f est la fonction qui a t associe $f'(t)$, là où ça a du sens. Elle contient beaucoup d'information sur la fonction f . Par exemple, si f' ne prend que des valeurs positives, alors f est une fonction croissante.

En pratique, on peut très souvent déterminer la dérivée des fonctions mathématiques abstraites que l'on considérera grâce aux dérivées de fonctions usuelles, et aux opérations sur les dérivées, regroupées en un formulaire.

fonction	1	t^k	$\frac{1}{t}$	$\cos(t)$	$\sin(t)$	$\exp(t)$	$\ln(t)$	\sqrt{t}
dérivée	0	kt^{k-1}	$-\frac{1}{t^2}$	$-\sin(t)$	$\cos(t)$	$\exp(t)$	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$

Pour les opérations, si k est une constant et f et g deux fonctions :

$$(kf)'(t) = kf'(t)$$

$$(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t)$$

$$(fg)'(t) = g(t)f'(t) + g'(t)f(t)$$

et, pour $f = g \circ u$ la fonction définie par $f(t) = g(u(t))$,

$$f'(t) = (g \circ u)'(t) = u'(t)g'(u(t)).$$

On résume ces opérations :

fonction	kf	$f + g$	fg	$g \circ u$
dérivée	kf'	$f' + g'$	$f' \times g + g' \times f$	$u' \times (g' \circ u)$

Pour la dernière opération (la composition), dans un premier temps, il vaut mieux retenir les formules obtenues en l'appliquant à g parmi les fonctions usuelles (dans chaque cas, on oubliera pas évaluer u et u' en t) :

f	u^k	$\frac{1}{u}$	$\cos(u)$	$\sin(u)$	$\exp(u)$	$\ln(u)$	\sqrt{u}
f'	$ku'u^{k-1}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$-u' \sin(u)$	$u' \cos(u)$	$u' \exp(u)$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Il faut, bien sûr, qu'on ait le droit de considérer $g \circ u$, et que toutes les dérivées impliquées ait un sens pour appliquer ces formules.

Exemple 2.2. Considérons la fonction définie par

$$f(t) = \exp(t) \cos(t^2),$$

et calculons sa dérivée. Quand on n'a pas l'habitude, on peut prendre le temps de décomposer toutes les étapes en introduisant temporairement d'autres fonctions. On remarque que $f(t)$ est un produit, $f(t) = f_1(t)g_1(t)$ où $f_1(t) = \exp(t)$ et $g_1(t) = \cos(t^2)$. On a donc

$$f'(t) = g_1(t)f_1'(t) + g_1'(t)f_1(t)$$

et f_1 est une fonction usuelle, pour laquelle on lit $f_1'(t) = \exp(t)$. Pour calculer $g_1'(t)$, on remarque que g_1 est de la forme d'une fonction composée : $g_1(t) = \cos(u(t))$ où $u(t) = t^2$. Donc on a, d'après le formulaire,

$$g_1'(t) = -u'(t) \sin(u(t)) \quad \text{et} \quad u'(t) = 2t$$

Finalement, en mettant tout ensemble, on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= g_1(t)f_1'(t) + g_1'(t)f_1(t) \\ &= \cos(t^2) \exp(t) - u'(t) \sin(u(t)) \exp(t) \\ &= \cos(t^2) \exp(t) - 2t \sin(t^2) \exp(t) \end{aligned}$$

Avec l'habitude, on n'a plus besoin d'introduire des fonctions temporaires, mais il vaut toujours mieux faire le calcul sur plusieurs lignes en appliquant une seule formule à chaque ligne.

2.2 Définition des dérivées partielles

Pour étudier les fonctions de deux variables, on se ramène à des fonctions d'une variables en considérant les fonctions partielles. Puisque ces dernières sont des fonctions d'une variable, on peut considérer leur dérivée. Ceci nous donne en tout point (a, b) de U deux nombres, qu'on appelle dérivées partielles.

Définition 2.3. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, $(a, b) \in U$ un point fixé et $f_{x=a}$, $f_{y=b}$ les fonctions partielles associées. On pose :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := (f_{y=b})'(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := (f_{x=a})'(b).$$

(si ces dérivées existent). Les nombres $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ sont respectivement appelés :

- **dérivée partielle (première) de f par rapport à x** au point (a, b) ;
- **dérivée partielle (première) de f par rapport à y** au point (a, b) .

L'interprétation des dérivées partielles au point (a, b) est assez directe par les fonctions partielles : la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ indique comment la fonction évolue en figeant $y = b$ et en faisant varier x près de a . En particulier, si $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) > 0$, alors f augmentera avec x près de $x = a$, si y reste figée égale à b . De même, si $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0$, alors f augmentera avec y , si x reste figée égale à a . On peut encore se représenter les choses avec le graphe : <https://www.geogebra.org/m/vw7c7jmk>

2.3 Comment calculer une dérivée partielle ?

2.3.1 Avec le formulaire !

D'après la définition, il s'agit de calculer la dérivée d'une fonction d'une variable. On peut alors utiliser le formulaire qu'on a rappelé pour calculer à partir des dérivées des fonctions usuelles, et des opérations sur les dérivées.

Exemple 2.4. Considérons la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = (x + y) \sin(x).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f_{x=a}(y) &= (a + y) \sin(a) = a \sin(a) + y \sin(a) \\ f_{y=b}(x) &= (x + b) \sin(x). \end{aligned}$$

On calcule les dérivées de ces fonctions grâce au formulaire :

$$(f_{x=a})'(b) = 0 + \sin(a)$$

(on a ici juste des fonctions usuelles multipliées par des constantes) et

$$(f_{y=b})'(a) = 1 \times \sin(x) + (x + b) \cos(x)$$

par la règle de dérivation d'un produit. On peut donc donner les expressions des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \sin(a) + (a + b) \cos(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \sin(a).$$

Avec les dérivées partielles, on définit en fait deux nouvelles fonction de deux variables, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, et on s'intéresse souvent à toutes les valeurs de ces fonctions. Ce n'est pas pratique de fixer à chaque calcul un point (a, b) .

En pratique : Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on dérive la fonction de x :

$$x \mapsto f(x, y)$$

en considérant y comme constante, "figée". On procède de manière analogue pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2.3.2 De manière approchée ?

En reprenant la définition de la dérivée comme limite, on peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon, b) - f(a, b)}{\varepsilon}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \varepsilon) - f(a, b)}{\varepsilon}$$

et ça permet aussi de donner des valeurs approchées d'une dérivée partielle, à partir d'un tableau de valeurs ou bien de courbes de niveau.

Exemple 2.5. D'après le tableau de vapeur surchauffée de l'Exemple 1.8, on peut donner comme valeur approximative des dérivées partielles de la fonction $f(T, P)$ qui donne le volume massique :

$$\frac{\partial f}{\partial T}(500, 3) \simeq \frac{.13 - .11}{600 - 500} = .0002$$

(ici, on a pris $a = 500$, $b = 3$, $\varepsilon = 100$ pour pouvoir lire $f(a + \varepsilon, b) = f(600, b)$ sur le tableau) et

$$\frac{\partial f}{\partial P}(500, 3) \simeq \frac{.08 - .11}{4 - 3} = -.03$$

Ce n'est pas très précis ici : on pourrait aussi utiliser comme approximation

$$\frac{\partial f}{\partial P}(500, 3) \simeq \frac{.17 - .11}{2 - 3} = -.06$$

qui donne un résultat différent. Mais ça permet quand même de constater de grandes différences de valeurs :

$$\frac{\partial f}{\partial P}(700, 1) \simeq \frac{.22 - .44}{2 - 1} = -.22$$

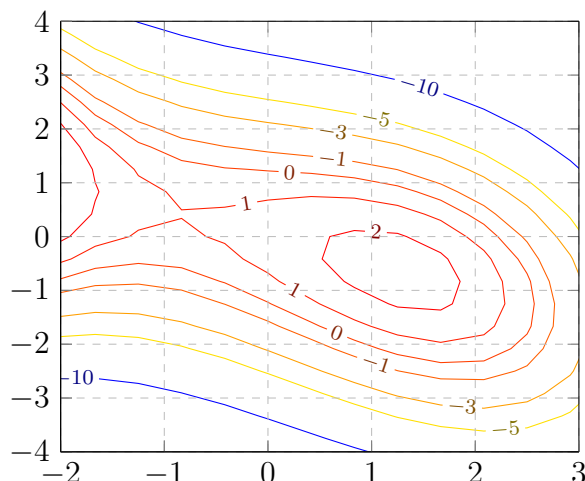
est par exemple beaucoup plus négatif. Cela reflète qu'ici, plus la température est élevée, plus le volume massique décroît rapidement avec la pression.

Exemple 2.6. D'après les courbes de niveau suivantes pour une fonction non-précisée f , on peut faire des estimations grossières

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) \simeq \frac{f(2, 0) - f(1, 0)}{1} \simeq -0.9$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \simeq \frac{f(1, 1) - f(1, 0)}{1} \simeq -1.9$$



De manière générale, si on trace des courbes de niveaux pour des valeurs de $f(x, y)$ régulièrement espacées C_0, C_1, C_2, \dots (pas comme dans l'exemple!)... Alors les distances entre les courbes de niveau qui passent près du point (a, b) nous renseignent sur les dérivées partielles de f .

Dans ce cours, on se concentrera sur le calcul exact.

2.3.3 Les outils logiciels

Beaucoup de logiciels permettent de calculer les dérivées partielles, soit de manière exacte, soit de manière approchée. Ces logiciels sont très utiles, mais dans ce cours, l'un des objectifs est de pratiquer le calcul "à la main", pour différentes raisons :

- développer vos compétences de calcul mathématiques, pas seulement pour les dérivées partielles,
- repérer les erreurs dans les résultats des logiciels : hallucinations d'IA, erreurs d'entrée dans un logiciel, erreurs dues à l'encodage des nombres,...
- ne pas toujours dépendre d'une machine,
- développer une intuition sur l'allure locale des fonctions de deux variables, etc.

Tout ça n'interdit pas d'utiliser ces logiciels de temps en temps, par exemple pour vérifier un calcul effectué en autonomie. Il vaut mieux toujours utiliser un logiciel adapté pour ce qu'on souhaite faire : une IA de langage type ChatGPT coûte beaucoup plus cher en ressources à utiliser qu'un logiciel de calcul scientifique ou de calcul formel, et risque de faire plus d'erreurs pour des calculs un peu inhabituels (elle ne fait pas de raisonnement, elle donne une réponse probable d'après le corpus de documents sur lequel elle a été entraînée, qui contient beaucoup de livres de Maths, de notes de cours, d'exercices corrigés,...).

Exemple 2.7. Voici quelques possibilités pour calculer les dérivées partielles :

- logiciel de calcul scientifique Scilab (logiciel libre) pour des calculs approchés,
- logiciel de calcul formel SageMath (logiciel libre) ou librairie SymPy du langage de programmation Python pour un calcul exact littéral,
- outil en ligne, spécialisé pour les maths : Wolfram Alpha (c'est très pratique, mais il vaut mieux privilégier un logiciel libre installé sur votre machine),
- ChatGPT etc (déconseillé),
- ...

2.4 Le choix des variables

2.4.1 Exemple en physique : les coefficients thermoélastiques

On suppose que pour un gaz avec une quantité de matière fixée, la pression P , le volume V et la température T sont reliés par une équation d'état, de sorte qu'on puisse exprimer chacune de ces grandeurs comme une fonction des deux autres. On notera ici $V = f(T, P)$, $T = g(V, P)$ et $P = h(T, V)$ (en tant que mathématicien, on introduit une notation pour chaque fonction, quand on dit que V est fonction de T et P , etc). Les **coefficients thermoélastiques** du gaz servent à exprimer la variation de volume ou de pression lors d'une transformation réversible. Ils sont définis en termes de dérivées partielles :

- le **coefficient de dilatation isobare** est $\alpha = \frac{1}{f(T,P)} \frac{\partial f}{\partial T}(T, P)$
- le **coefficient de compression isochore** est $\beta = \frac{1}{h(T,V)} \frac{\partial h}{\partial T}(T, V)$
- le **coefficient de compressibilité isotherme** est $\chi_T = -\frac{1}{f(T,P)} \frac{\partial f}{\partial P}(T, P)$

On notera que le nom de chaque coefficient indique quelle variable est figée : isobare pour la pression P figée, isochore pour le volume V figé, et isotherme pour la température T figée.

Remarque 2.8. Ces notions ne figurent pas dans les objectifs d'apprentissage du cours. Si elles apparaissent en examen, leur définition sera rappelée, et aucun résultat de physique ne sera nécessaire ou supposé connu. On utilise uniquement ces notions à titre d'illustration de l'usage des outils mathématiques en physique.

Exemple 2.9. Pour un gaz parfait avec l'équation d'état $PV = kT$, on a $V = f(T, P) = \frac{kT}{P}$ et $P = h(T, V) = \frac{kT}{V}$, d'où

$$\alpha = \frac{1}{f(T, P)} \frac{\partial f}{\partial T}(T, P) = \frac{P}{kT} \frac{k}{P} = \frac{1}{T}$$

$$\beta = \frac{1}{h(T, V)} \frac{\partial h}{\partial T}(T, V) = \frac{P}{kT} \frac{k}{P} = \frac{1}{T} = \alpha$$

et

$$\chi_T = -\frac{1}{f(T, P)} \frac{\partial f}{\partial P}(T, P) = -\frac{P}{kT} \frac{-kT}{P^2} = \frac{1}{P}$$

En passant, on retrouve ici aussi que plus la température est élevée, plus le volume massique décroît rapidement avec la pression :

$$\frac{\partial f}{\partial P}(T, P) = \frac{-kT}{P^2}$$

Au contraire, plus la pression de départ est élevée, moins le volume massique décroît rapidement avec la pression.

Remarque 2.10. Les physiciens ne s'embarrassent pas d'une notation pour chaque fonction et utilisent les notations :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

où il est sous-entendu que V est une fonction de T et P dans la première et la dernière expression, et que P est une fonction de T et V dans l'expression intermédiaire. On évitera d'utiliser ces notations pour ce cours.

2.4.2 Coordonnées polaires

Tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 peut être représenté en coordonnées polaires (r, θ) : il s'agit de la distance r du point (x, y) à l'origine, et de l'angle θ entre la droite passant par (x, y) et l'origine et l'axe des abscisses (illustration à venir dans une prochaine version du document).

Pour tout point (x, y) , il y a en fait plusieurs choix possibles pour θ : par exemple, pour $(-1, 0)$, est-ce π ? $-\pi$? voire même 3π ? Il est possible de faire un choix cohérent en prenant $\theta \in [0, 2\pi[$ par exemple, mais nous nous laisserons plutôt la liberté de choisir n'importe quel θ modulo 2π . L'origine est un point plus particulier : il correspond à $r = 0$, et dans ce cas, on ne peut pas vraiment définir l'angle. Nous travaillerons plutôt sur le plan privé de l'origine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ lorsque nous parlerons de coordonnées polaires, et les coordonnées polaires vivront dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

On peut donner des expressions explicites des coordonnées (x, y) étant données les coordonnées polaires (r, θ) :

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Dans l'autre sens, il est facile d'exprimer r en fonction de (x, y) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

mais un peu moins pour θ (en raison des subtilités évoquées ci-dessus).

En termes de fonctions, on peut associer à une fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Les fonctions partielles $g_{r=r_0}$ décrivent comment la quantité $f(x, y)$ varie le long du cercle de centre l'origine et de rayon r . Les fonctions partielles $g_{\theta=\theta_0}$ décrivent comment la quantité $f(x, y)$ varie le long de la demi-droite partant de l'origine, qui forme un angle θ avec l'axe des abscisses. Ainsi, les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ de g donnent une information sur la fonction f , différente a priori de celle donnée par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On verra un peu plus tard dans ce cours comment ces deux informations sont reliées. Pour l'instant contentons nous d'un exemple de calcul de dérivée partielles.

Exemple 2.11. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Passer en coordonnées polaire revient à considérer la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} g(r, \theta) &= f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= \frac{r \cos(\theta) + r \sin(\theta)}{r} \\ &= \cos(\theta) + \sin(\theta) \end{aligned}$$

On constate que la valeur de g ne dépend pas de r , et donc que

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

Cela reflète que la fonction $f(x, y)$ est constante le long des demi-droites partant de l'origine. Par ailleurs, on peut calculer

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -\sin(\theta) + \cos(\theta)$$

2.5 Un exemple très simple d'EDP : l'équation de transport

Beaucoup de phénomènes physiques sont modélisés par des fonctions de plusieurs variables, dont les diverses dérivées partielles (pas seulement les dérivées partielles premières définies pour le moment) vérifient des équations. On parle d'EDP : équations aux dérivées partielles. Elles sont en général très difficiles, voire impossible à résoudre exactement, et souvent très difficiles à résoudre numériquement de manière approchée. Dans certains cas simples, on peut décrire la forme des solutions. Voici un tel exemple.

Considérons une modélisation très simplifiée du déplacement d'une vague dans un canal très fin par une fonction de deux variables $h(x, t)$. La variable x représente la position le long de ce canal disons d'Ouest en Est, et la variable t représente le temps. La fonction partielle $h_{t=t_0}$ représente la hauteur de l'eau tout le long du canal au temps t_0 fixé, et la fonction partielle $h_{x=x_0}$ représente l'évolution dans le temps de la hauteur de l'eau au point x_0 .

On suppose que la vague se déplace à une vitesse constante égale à c le long du canal (ignorons les unités), d'Ouest en Est. Alors si on considère la hauteur de la vague à la position x_0 et au temps $t_0 + \Delta t$, c'est la même que celle de la vague à la position $x_0 - c\Delta t$ et au temps t_0 . Autrement dit, on a

$$h(x_0 - c\Delta t, t_0) = h(x_0, t_0 + \Delta t)$$

On peut retrancher $h(x_0, t_0)$ de chaque côté, et diviser par Δt :

$$\frac{h(x_0 - c\Delta t, t_0) - h(x_0, t_0)}{\Delta t} = \frac{h(x_0, t_0 + \Delta t) - h(x_0, t_0)}{\Delta t}$$

On retrouve, à droite l'expression du taux d'accroissement de la fonction partielle $h_{x=x_0}$, qui tends vers la dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial t}(x_0, t_0)$ lorsque Δt tends vers 0. Du côté gauche, on peut écrire $\Delta x = -c\Delta t$ la distance (avec un signe pour indiquer que c'est vers l'Ouest) entre x_0 et $x_0 - c\Delta t$, et réécrire ce terme

$$\frac{h(x_0 - c\Delta t, t_0) - h(x_0, t_0)}{\Delta t} = -c \frac{h(x_0 + \Delta x, t_0) - h(x_0, t_0)}{\Delta x}$$

ce qui fait apparaître le taux d'accroissement de la fonction partielle $h_{t=t_0}$, qui tends vers la dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t_0)$ lorsque Δx tends vers 0. Finalement, l'équation de transport unidimensionnelle est l'EDP

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -c \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

Toute fonction de la forme

$$h(x, t) = f(x - ct)$$

où f est une fonction (dérivable) d'une seule variable vérifie cette EDP. En effet, on peut calculer en appliquant la formule pour la dérivée d'une fonction composée que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = f'(x - ct) \qquad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -cf'(x - ct)$$

En regardant le graphe de h , ou de plusieurs fonctions partielles $f_{t=t_0}, f_{t=t_1}, \dots$ on comprends mieux. En fait, on peut montrer que ce sont les seules solutions possibles, on y reviendra.

2.6 Points critiques et extrema

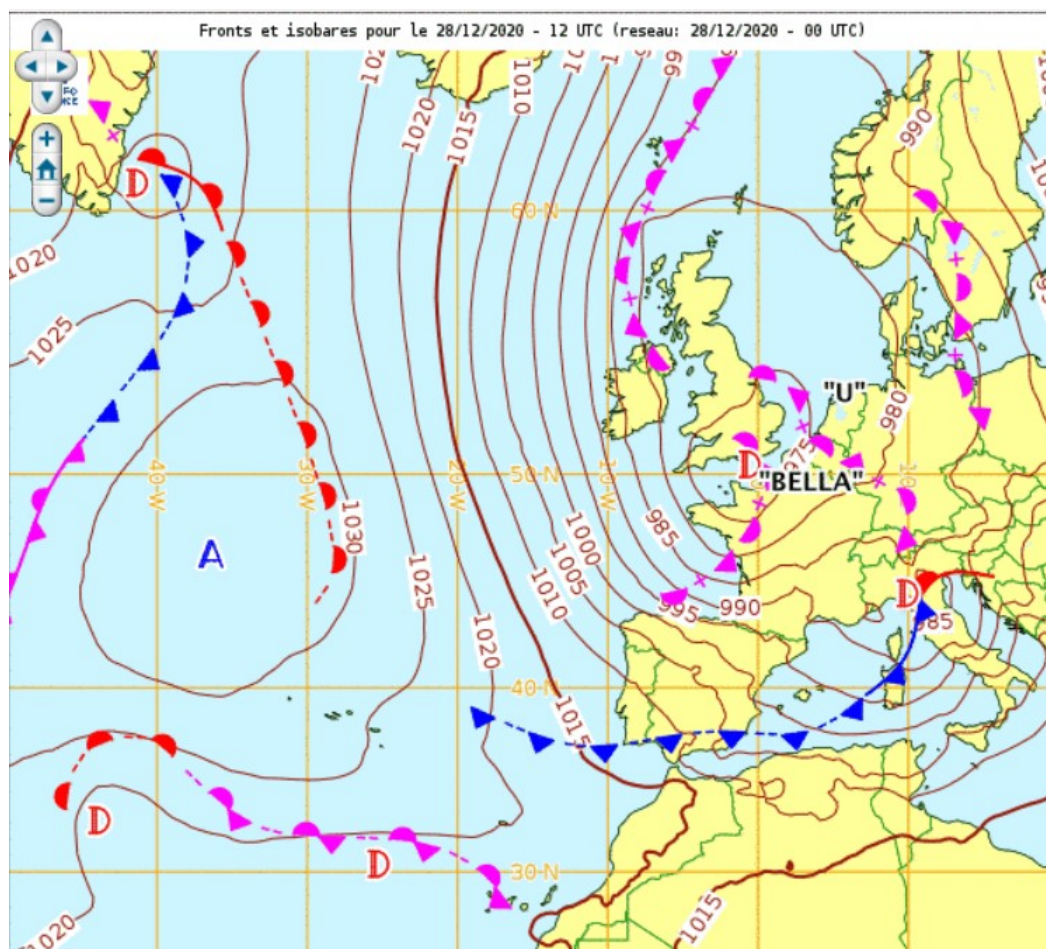
Passons maintenant à une application possible de la notion de dérivée partielle : la recherche d'extremums. Faisons d'abord un point de vocabulaire.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et (x_0, y_0) un point de U .

1. On dit que f atteint un **maximum** au point (x_0, y_0) si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, pour tout point (x, y) de U .
2. On dit que f atteint un **minimum** au point (x_0, y_0) si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, pour tout point (x, y) de U .
3. Pour inclure les deux cas en même temps, on dit que f atteint un **extremum** au point (x_0, y_0) si f atteint un maximum ou bien un minimum en ce point.

Pour repérer un maximum ou un minimum, on peut s'aider du graphe ou des courbes de niveau.

Exemple 2.12. En météo, les anticyclones sont des zones de haute pression, et les dépressions des zones de... basse pression. On les repère sur un bulletin météo (ci-dessous une carte – ancienne – de Météo France, on peut aussi revenir au bulletin météo du premier cours) grâce aux isobares, les courbes de niveau de la pression. Le centre d'un anticyclone correspond à un maximum de la pression (au moins dans cette zone), et le centre d'une dépression à un minimum. Ils sont repérés par une lettre A ou D sur la carte.



Si on dispose d'une expression mathématique de la fonction, les dérivées partielles fournissent un outil puissant pour trouver les extremums.

Définition 2.13. Les **points critiques** d'une fonction de deux variables f définie sur U sont les points (x, y) de U où f tels que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Remarque 2.14. Pour une fonction d'une seule variable $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, les **points critiques** de g sont les points où $g'(t) = 0$.

Les notions d'extremum et de points critiques sont différentes, mais partagent un lien très fort.

Théorème 2.15. *Si une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un extremum au point (x_0, y_0) , et si ses dérivées partielles existent en ce point, alors (x_0, y_0) est un point critique de f .*

Démonstration. Supposons, par exemple, que f atteint un maximum au point (x_0, y_0) . On a donc $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout point (x, y) de U . Notons $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction partielle $f_{y=y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$, définie sur $I = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U\}$. Comme f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) , la fonction g est dérivable en x_0 , et $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. De plus, g atteint un maximum en x_0 puisque $g(x) \leq g(x_0)$ pour tout $x \in I$. Il suffit donc de montrer que $g'(x_0) = 0$.

Pour ceci, on utilise la définition comme limite, et on approche le réel x_0 par les valeurs supérieures, puis par les valeurs inférieures (on se rappelle qu'on demande que dans I on puisse aller "des deux côtés" de x_0 pour pouvoir dire que g est dérivable en x_0). On a, pour $\varepsilon > 0$,

$$\frac{g(x_0 + \varepsilon) - g(x_0)}{\varepsilon} \leq 0$$

donc par passage à la limite (cf OM1), $g'(x_0) \leq 0$, et pour $\varepsilon < 0$,

$$\frac{g(x_0 + \varepsilon) - g(x_0)}{\varepsilon} \geq 0$$

donc par passage à la limite, $g'(x_0) \geq 0$. En combinant les deux inégalités, on en déduit $g'(x_0) = 0$.

On a montré $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et en procédant de la même manière on montrerait $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Le cas d'un minimum se traite également de la même manière. \square

Attention ! De même que dans le cas d'une variable, la réciproque de cette assertion est fautive : les deux dérivées partielles premières de f peuvent très bien s'annuler en un même point sans que la fonction possède nécessairement un extremum en ce point. L'intérêt de ce résultat est surtout de pouvoir déterminer, pour une fonction donnée, quel point est un extremum "possible" ; il faut souvent des arguments supplémentaires pour pouvoir conclure que le point critique est un extremum.

Exemple 2.16. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. On remarque visuellement (sur le graphe) que cette fonction possède un minimum en $(0, 0)$. Cela est facile à vérifier :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq 0 = f(0, 0).$$

Comme le prédit le résultat ci-dessus, on a bien :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

car

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

On appelle point selle ou point col les points critiques qui ressemblent à l'exemple suivant : en partant du point critique dans une direction, la fonction augmente (dans les deux sens), alors qu'en partant du point critique dans une autre direction, la fonction diminue (encore dans les deux sens).

Exemple 2.17. Le fonction définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ n'admet ni minimum, ni maximum (regarder les fonctions partielles en $(0, 0)$, mais $(0, 0)$ est un point critique :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Ce point critique est un point selle (là encore, regarder le graphe des fonctions partielles en $(0, 0)$).

Il peut y avoir des points critiques encore plus dégénérés.

Exemple 2.18. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3$. Cette fonction vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

donc en particulier

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

mais on remarque visuellement (sur le graphe) qu'elle n'a pas de min ni de max en $(0, 0)$. En effet, $f(1, 0) = 1$, $f(-1, 0) = -1$, et $f(0, 0) = 0$.

Enfin, c'est un cas inintéressant, mais pour une fonction constante, tous les points sont des points critiques, mais aussi tous des minimums, et tous des maximums...

2.7 Notions de régularité

2.7.1 Limites et continuité

On a évoqué plus haut comment les courbes de niveaux permettent de localiser un extremum. La preuve mathématique de la validité de cette approche n'est pas évidente et nécessite de formaliser la notion de continuité. Nous ne pouvons être complètement précis dans ce cours sur la notion de limite pour les fonctions de plusieurs variables, donc on se contentera d'une idée informelle : $f(x, y)$ admet ℓ comme limite lorsque (x, y) tends vers (a, b) si, en prenant

(x, y) suffisamment proche de (a, b) , on peut rendre $f(x, y)$ aussi proche de ℓ que l'on veut. On note ça

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \ell$$

En admettant cette définition informelle, on peut définir précisément la continuité.

Définition 2.19. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

1. f est **continue au point** (a, b) si :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

2. f est **continue** (tout court) si elle est continue en tout point de U . On dit aussi que f est de classe C^0 .

2.7.2 Application à l'optimisation (hors programme)

On appelle optimisation la recherche d'extremums de fonctions. Grâce à la continuité, on a un résultat qui permet de démontrer l'existence d'un maximum ou d'un minimum :

Théorème 2.20. *Si f est une fonction continue, définie sur une sous-région $K \subset U$ bornée (informellement : on ne peut pas partir à l'infini dans K) et fermée (informellement : elle contient sa frontière), alors f atteint un maximum et un minimum **sur** K .*

Remarque 2.21.

- C'est un complément culturel : on ne vous demandera pas d'appliquer ce résultat en examen HAS102X.
- Attention, on parle bien ici de maximum (et minimum) **sur** K , c'est-à-dire que si f atteint son maximum sur K en (a, b) , il peut exister un point (c, d) en dehors de K pour lequel $f(c, d) > f(a, b)$.
- Par conséquent, on ne peut pas forcément utiliser le Théorème sur les points critiques ! Mais en fait, on peut l'utiliser pour les points qui ne sont **pas** sur la frontière de K . Ainsi, le maximum et le minimum de f sur K sont atteints, soit en un point critique, soit sur la frontière de K .

2.7.3 Fonctions de classe C^1

On va préciser ici une propriété des fonctions de deux variables qui est nécessaire formellement à beaucoup d'énoncés dans ce cours. En pratique, on supposera toujours qu'elle est satisfaite par les fonctions considérées.

Définition 2.22. Une fonction de deux variables $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est **de classe C^1** si les deux fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont **continues** sur U .

De manière analogue, si une fonction d'une variable $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle sera dite **de classe C^0** . Si g est dérivable et que sa dérivée $g' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle sera dite **de classe C^1** .

3 Formes différentielles

3.1 Formes linéaires

On introduit une notation pour les deux fonctions suivantes sur (\mathbb{R}^2) :

$$\mathbf{dx} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto x.$$

$$\mathbf{dy} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto y.$$

Il s'agit simplement des fonctions qui donnent les coordonnées,

$$\mathbf{dx}(x, y) = x$$

$$\mathbf{dy}(x, y) = y.$$

mais on va y penser un peu différemment, et les utiliser pour définir les formes différentielles.

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on peut définir une fonction sur \mathbb{R}^2 :

$$\ell = a \mathbf{dx} + b \mathbf{dy}.$$

où cette notation signifie que :

$$\ell(x, y) = a \mathbf{dx}(x, y) + b \mathbf{dy}(x, y) = ax + by$$

Définition 3.1. On appelle une fonction de la forme $a \mathbf{dx} + b \mathbf{dy}$ une **forme linéaire**.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 3.2. Soit $\ell = a \mathbf{dx} + b \mathbf{dy}$ une forme linéaire, alors on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\ell(\lambda x, \lambda y) = \lambda \ell(x, y)$$

et pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\ell(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \ell(x_1, y_1) + \ell(x_2, y_2)$$

En fait, réciproquement, toute fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie ces deux propriétés est une fonction de la forme $a \mathbf{dx} + b \mathbf{dy}$, comme vous le verrez au second semestre en Outils Mathématiques 3.

3.2 Formes différentielles sur un domaine de \mathbb{R}^2

Définition 3.3. Une **forme différentielle** sur une partie U de \mathbb{R}^2 est une application ω définie sur U qui, à tout point (x, y) de U associe une forme linéaire $\omega_{(x,y)}$. Autrement dit, on peut donc écrire, pour tout $(x, y) \in U$,

$$\omega_{(x,y)} = a(x, y) \mathbf{dx} + b(x, y) \mathbf{dy}$$

où $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions à valeurs réelles définies sur U .

Attention, $\omega_{(x,y)}$ n'est pas un nombre, il doit encore "manger" un élément de \mathbb{R}^2 . Avec la notation ci-dessus, et pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\omega_{(x,y)}(u, v) = a(x, y)u + b(x, y)v$$

qui cette fois est un nombre réel.

Exemple 3.4. Soit ω la forme différentielle sur \mathbb{R}^2 définie par :

$$\omega_{(x,y)} = x^3 \mathbf{dx} + \sin(x) \cos(y) \mathbf{dy} .$$

Si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\omega_{(x,y)}(u, v) = x^3 u + \sin(x) \cos(y)v .$$

Si $x = 1$, $y = \frac{\pi}{2}$, $u = 2$ et $v = 3$ par exemple, on a

$$\omega_{(1, \frac{\pi}{2})}(2, 3) = 1^3 \cdot 2 + \sin(1) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 .$$

On va maintenant définir deux opérations sur l'ensemble des formes différentielles : la somme de deux formes différentielles et le produit d'une forme différentielle par une fonction de deux variables.

Définition 3.5. Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables sur U et :

$$\omega_{(x,y)} = a(x, y) \mathbf{dx} + b(x, y) \mathbf{dy} \quad \nu_{(x,y)} = p(x, y) \mathbf{dx} + q(x, y) \mathbf{dy}$$

deux formes différentielles sur U .

1. On appelle **produit de la forme ω par la fonction h** et on note $h \cdot \omega$ la forme différentielle sur U définie par :

$$(h \cdot \omega)_{(x,y)} = h(x, y)\omega(x, y)$$

2. On appelle **somme des formes ω et ν** et on note $\omega + \nu$ la forme différentielle sur U définie par :

$$(\omega + \nu)_{(x,y)} = \omega(x, y) + \nu(x, y) .$$

En d'autres termes :

$$(h \cdot \omega)_{(x,y)} = h(x, y)a(x, y) \mathbf{dx} + h(x, y)b(x, y) \mathbf{dy}$$

et

$$\begin{aligned} (\omega + \nu)_{(x,y)} &= \omega_{(x,y)} + \nu_{(x,y)} \\ &= (a(x, y) + p(x, y)) \mathbf{dx} + (b(x, y) + q(x, y)) \mathbf{dy} \end{aligned}$$

3.3 Différentielle d'une fonction de deux variables

Définition 3.6. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 de deux variables sur U . On lui associe une forme différentielle sur U , notée $\mathbf{d}f$, de la manière suivante :

$$\mathbf{d}f_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \mathbf{d}y$$

La forme différentielle $\mathbf{d}f$ est appelée **la différentielle de f** .

Remarque 3.7. On peut faire la même définition en une variable : si $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une seule variable t , alors on appelle $\mathbf{d}v = v'(t) \mathbf{d}t$ la différentielle de v , où $\mathbf{d}t$ est la fonction identité $\mathbf{d}t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$.

Exemple 3.8. Si $f(x,y) = (x+y) \sin(x)$ alors :

$$\mathbf{d}f_{(x,y)} = (\sin(x) + (x+y) \cos(x)) \mathbf{d}x + \sin(x) \mathbf{d}y$$

Exemple 3.9. Si f est une fonction constante, alors $\mathbf{d}f = 0$. En effet, dans ce cas, les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont identiquement nulles et par suite $\mathbf{d}f_{(x,y)} = 0$ pour tout (x,y) dans U .

Remarquons que la différentielle permet de réinterpréter un point critique de f comme un point où la différentielle est nulle, et donc de ré-écrire la proposition 2.15 :

Proposition 3.10. Si une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 possède un extremum au point $M_0 \in U$, alors

$$\mathbf{d}f_{M_0} = 0.$$

Dans la proposition suivante, nous donnons un recueil des premières formules à connaître pour pouvoir faire des calculs faisant intervenir des différentielles. Il s'agit presque d'une réécriture du formulaire pour les opérations sur les dérivées de fonctions d'une variable.

Proposition 3.11. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 et λ un nombre réel. Alors $f + g$, λf et fg sont de classe C^1 et on a :

$$\mathbf{d}(f + g) = \mathbf{d}f + \mathbf{d}g \qquad \mathbf{d}(\lambda f) = \lambda \mathbf{d}f \qquad \mathbf{d}(fg) = g \cdot \mathbf{d}f + f \cdot \mathbf{d}g$$

Démonstration. On admet la propriété de régularité, et on vérifie les formules, en appliquant le formulaire pour les dérivées de fonctions d'une variable. Pour la première formule, on a, en appliquant la formule pour la dérivée d'une somme.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(f + g)_{(x,y)} &= \frac{\partial}{\partial x}((f + g)(x,y)) \mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}((f + g)(x,y)) \mathbf{d}y \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) + g(x,y)) \mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y) + g(x,y)) \mathbf{d}y \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right) \mathbf{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right) \mathbf{d}y \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \mathbf{d}y \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \mathbf{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \mathbf{d}y \right) \\ &= \mathbf{d}f_{(x,y)} + \mathbf{d}g_{(x,y)} \end{aligned}$$

La vérification est encore plus simple pour la seconde formule en appliquant la formule pour la dérivée d'une fonction multipliée par une constante, nous n'écrivons pas le détail. Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(fg)_{(x,y)} &= \frac{\partial}{\partial x}((fg)(x,y)) \mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}((fg)(x,y)) \mathbf{d}y \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)g(x,y)) \mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)g(x,y)) \mathbf{d}y \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y) + f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right) \mathbf{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)g(x,y) + f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right) \mathbf{d}y \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y) \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)g(x,y) \mathbf{d}y \right) + \left(f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \mathbf{d}x + f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \mathbf{d}y \right) \\
&= g(x,y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \mathbf{d}y\right) + f(x,y)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \mathbf{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \mathbf{d}y\right) \\
&= g(x,y)\mathbf{d}f_{(x,y)} + f(x,y)\mathbf{d}g_{(x,y)}
\end{aligned}$$

□

Par rapport au formulaire pour les fonctions d'une variable, il manque l'opération de composition. Il y a ici de nombreuses manières pour composer des fonctions d'une et deux variables, qu'on va passer en revue. Commençons par le cas facile.

Proposition 3.12. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 de deux variables et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable de classe C^1 . Alors la fonction de deux variables $v \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto v(f(x, y))$ est de classe C^1 , et sa différentielle est donnée par :*

$$\boxed{\mathbf{d}(v \circ f) = (v' \circ f) \cdot \mathbf{d}f}.$$

Démonstration. Une fois encore, on va se contenter de vérifier la formule : pour tout point (x, y) de U , en utilisant la formule pour la dérivée de la composition de deux fonctions d'une variable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(v \circ f)_{(x,y)} &= \frac{\partial}{\partial x}(v(f(x,y))) \mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(v(f(x,y))) \mathbf{d}y \\
&= v'(f(x,y))\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) \mathbf{d}x + v'(f(x,y))\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) \mathbf{d}y \\
&= v'(f(x,y)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \mathbf{d}y \right) \\
&= v'(f(x,y)) \mathbf{d}f_{(x,y)} \\
&= ((v' \circ f) \cdot \mathbf{d}f)_{(x,y)}
\end{aligned}$$

□

3.4 Primitives et formes exactes

3.4.1 Définition

Définition 3.13. Une forme différentielle ω est dite **exacte** si elle est égale à la différentielle d'une fonction :

$$\boxed{\omega = \mathbf{d}f}$$

On dit alors que f est une **primitive** de ω .

Pour comprendre ce que ça signifie, revenons aux définitions. D'abord, on peut écrire

$$\omega_{(x,y)} = a(x, y) \, \mathbf{d}x + b(x, y) \, \mathbf{d}y$$

où a et b sont deux fonctions de deux variables. Pour une fonction de deux variable f , sa différentielle $\mathbf{d}f$ s'écrit

$$\mathbf{d}f_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, \mathbf{d}y$$

Donc ω est exacte, et admet f pour primitive si

$$a(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad b(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Précisons dès maintenant que la plupart des formes différentielles ne sont **pas exacte**. Nous allons passer du temps à voir comment vérifier si une forme différentielle est exacte ou non, et pourquoi c'est important, dans ce cours.

3.4.2 Cas des fonctions d'une variable

En imitant la définition pour deux variables, une forme différentielle α en une variable est de la forme

$$\alpha_t = u(t) \, \mathbf{d}t$$

où $\mathbf{d}t$ est la forme linéaire en une variable donnée par la fonction identité. Par conséquent, la donnée de α et de la seule fonction u sont équivalentes. La forme α est exacte, de primitive la fonction d'une variable v , si $\alpha = \mathbf{d}v$, où

$$\mathbf{d}v_t = v'(t) \, \mathbf{d}t.$$

En termes de la fonction u , il s'agit de la relation

$$v'(t) = u(t),$$

la définition standard de primitive que vous avez sans doute déjà vue.

Le résultat clef dont nous aurons besoin sur les primitives de fonctions d'une variable est le suivant :

Théorème 3.14. *Si $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , et v est une primitive de u , alors toute primitive de u s'écrit sous la forme*

$$t \mapsto v(t) + c$$

pour une constante réelle c .

En une variable, il suffit donc de trouver une seule primitive pour les connaître toutes. Pour les fonctions d'une variable construites à partir de fonctions usuelles, on peut travailler comme pour les dérivées avec un formulaire pour trouver des primitives (mais ça marche un peu moins bien pour les opérations). On a ainsi le tableau de primitives usuelles, qui revient essentiellement à lire le tableau des dérivées usuelles à l'envers :

fonction	1	t^k	$\frac{1}{t}$	$\cos(t)$	$\sin(t)$	$\exp(t)$
primitives	$t + c$	$\frac{t^{k+1}}{k+1} + c$	$\ln(t) + c$	$\sin(t) + c$	$-\cos(t) + c$	$\exp(t) + c$

Pour la somme ou la multiplication par une constante, on a aussi une règle simple : si v_1 et v_2 sont des primitives de u_1 et u_2 , et si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante, alors $v_1 + v_2$ est une primitive de $u_1 + u_2$, et λv_1 est une primitive de λu_1 .

Exemple 3.15. La fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 2t^2 + 3t - 5$ admet pour primitive toutes les fonctions de la forme $v : t \mapsto 2\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} - 5t + c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

Plus difficile : on peut reconnaître la forme de la dérivée d'un produit, ou de la dérivée d'une fonction composée, pour reconstruire la primitive.

Exemple 3.16. La fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sin(t) \cos(t)$ est donnée par un produit, mais ça ne nous avance a priori pas beaucoup : la dérivée d'un produit n'est pas un produit mais une somme de deux produits. Par contre, la dérivée d'une fonction composée est donnée par un produit de fonctions, encore faut-il qu'elles soient de la bonne forme. Ici, on remarque que \cos est la dérivée de \sin , donc $u(t) = \sin'(t) \sin(t)$. C'est presque la dérivée de $(\sin(t))^2$. En corrigeant un peu, on constate que $v(t) = \frac{1}{2}(\sin(t))^2$ définit une primitive de u , et donc que toutes les primitives de u sont de la forme $v(t) + c$ pour un $c \in \mathbb{R}$.

3.4.3 En deux variables : exemples

Pour montrer qu'une forme différentielle (sur un ouvert de \mathbb{R}^2) est exacte, on peut se ramener à des fonctions d'une variable en travaillant avec les dérivées et les fonctions partielles. Faisons le sur un exemple.

Exemple 3.17. On considère la forme différentielle ω sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$\omega_{(x,y)} = (2x + y) \mathbf{dx} + (x + 3y) \mathbf{dy}$$

Ici les fonctions $a(x, y)$ et $b(x, y)$ telles que $\omega_{(x,y)} = a(x, y) \mathbf{dx} + b(x, y) \mathbf{dy}$ sont données par $b(x, y) = x + 3y$, et $a(x, y) = 2x + y$. Supposons que f soit une primitive de ω . Alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$$

En fixant $y = y_0$ constante, on a alors

$$f'_{y=y_0}(x) = 2x + y_0$$

c'est-à-dire que $f_{y=y_0}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x + y_0$. On sait quelles sont ces primitives : ce sont les fonctions $x^2 + y_0x + c$ où c est une constante. Attention cependant, pour faire ce raisonnement, on avait fixé $y = y_0$, donc la constante c **peut dépendre** de y . Finalement, on sait que $f(x, y) = x^2 + yx + c(y)$. On doit aussi avoir

$$x + 3y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + c'(y)$$

donc $c'(y) = 3y$. C'est possible si $c(y) = \frac{3y^2}{2} + d$ où d est une constante (Là encore, d pourrait a priori dépendre de x , mais en recoupant avec les informations déjà obtenue, d doit être constante). Finalement, on a montré que si f est une primitive, alors $f(x, y) = x^2 + yx + \frac{3y^2}{2} + d$ où d est une constante. Réciproquement, on vérifie facilement que toutes ces fonctions vérifient bien $\mathbf{d}f = \omega$.

En pratique, on n'a pas besoin d'introduire un y_0 comme ci-dessus dans la rédaction. On dit juste (par le raisonnement ci-dessus) que les fonctions f qui vérifient $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x, y)$ sont de la forme $A(x, y) + c(y)$ où, à y fixé, $x \mapsto A(x, y)$ est une primitive de $a(x, y)$.

Remarque 3.18. Pour être tout à fait précis, ce raisonnement ne marche que si toutes les fonctions partielles de f sont définies sur des intervalles ! C'est parce qu'on applique le Théorème 3.14

Cela suffit aussi souvent pour démontrer qu'une forme différentielle n'est pas exacte, même si on verra d'autres outils plus tard.

Exemple 3.19. Considérons la forme différentielle

$$\omega_{(x,y)} = 2 \mathbf{d}x + 3x \mathbf{d}y$$

sur \mathbb{R}^2 . En appliquant le début du raisonnement ci-dessus, si f est une primitive de ω , on a nécessairement $f(x, y) = 2x + c(y)$. Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = c'(y)$$

Il faudrait qu'on puisse avoir $3x = c'(y)$ pour tout (x, y) dans \mathbb{R}^2 , c'est bien évidemment impossible (par exemple, on aurait $0 = 3 \cdot 0 = c'(0) = 3 \cdot 1 = 3 \dots$).

3.5 Dérivée le long d'un arc

3.5.1 Arc paramétré

Définition 3.20. Un **arc paramétré** est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ qui associe, à un nombre réel t dans un intervalle I (son intervalle de définition), le point $(x(t), y(t))$ de \mathbb{R}^2 . Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ qui définissent γ sont appelées ses **fonctions composantes**.

L'image $\gamma(I)$ de γ , c'est-à-dire l'ensemble des points $(x(t), y(t))$ lorsque t parcourt I , est une courbe dans \mathbb{R}^2 (dans le cas très particulier où les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont constantes, cette courbe se réduit à un seul point). On dit que γ paramètre, ou décrit la courbe $\gamma(I)$.

Exemple 3.21. Si $x(t) = t$ et $y(t) = at + b$, alors $\gamma(t)$ décrit la droite d'équation $y = ax + b$ dans le plan.

Attention, il y a toujours différentes manières de parcourir une courbe, donc différents arcs qui décrivent la même courbe.

Exemple 3.22. Si $x(t) = t^3 + 2t + 4$ et $y(t) = 2t^3 + 4t$, alors $\gamma(t)$ décrit encore une droite dans le plan, d'équation $y = 2x - 8$.

Définition 3.23. Si les fonctions composantes $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ qui définissent γ sont dérivables, on dit que γ est dérivable, et on appelle

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

la dérivée de γ en t .

C'est un élément de \mathbb{R}^2 , auquel on ne pense pas en général comme à un point, mais comme à un vecteur.

Exemple 3.24. Si $\gamma(t)$ décrit la position d'une particule dans le plan, à l'instant t , alors $\gamma'(t)$ est le **vecteur vitesse** de cette particule à l'instant t .

On peut, comme pour les fonctions à valeurs réelles, l'interpréter comme une limite, même si on ne formalisera pas ça dans ce cours :

$$\gamma'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \varepsilon) - \gamma(t)}{\varepsilon}$$

Notons qu'ici, on fait des opérations sur les points de \mathbb{R}^2 , qui correspondent à faire les opérations composantes par composantes (ou coordonnées par coordonnées). On peut, avec cette notion de limite, définir des propriétés de régularité.

Définition 3.25.

— Un arc $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est **continu** (ou **de classe C^0**) si pour tout $t \in I$,

$$\gamma(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(t + \varepsilon).$$

— Un arc $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est **de classe C^1** s'il est dérivable, et si l'arc γ' est de classe C^0 .

Exemple 3.26. Si $x(t) = \ln(t)$ et $y = \ln(t)^2$, alors γ est un arc de classe C^1 (qui décrit la parabole $y = x^2$), et

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{2 \ln(t)}{t} \right)$$

3.5.2 Dérivée d'une fonction de deux variables le long d'un arc

Théorème 3.27. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\gamma : I \rightarrow U, t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe à valeurs dans le domaine U , de classe C^1 . Alors la fonction d'une variable $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi de classe C^1 , et, pour tout t dans I on a :

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= \mathbf{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \end{aligned}$$

Démonstration. Admise. On utilise ici vraiment la propriété d'être C^1 , et pas juste que les dérivées partielles existent. \square

En particulier, cela donne une interprétation graphique des valeurs prises par la forme différentielle. En l'appliquant à la courbe $\gamma : t \mapsto (x + tu, y + tv)$, qui décrit la droite passant par (x, y) et de vecteur directeur (u, v) , on retrouve aussi une interprétation comme limite similaire à la définition de la dérivée.

$$\mathbf{d}f_{(x,y)}(u, v) = (f \circ \gamma)'(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon u, y + \varepsilon v) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

Définition 3.28. On appelle $\mathbf{d}f_{(x,y)}(u, v)$ la **dérivée directionnelle** de f en (x, y) selon le vecteur (u, v) .

Attention, souvent, on ne considère que des vecteurs unitaires (de norme 1) pour cette notion, car elle dépend de la norme du vecteur. Par exemple $\mathbf{d}f_{(x,y)}(2u, 2v) = 2\mathbf{d}f_{(x,y)}(u, v)$ (c'est parce que $\mathbf{d}f_{(x,y)}$ est une forme linéaire!)

Exemple 3.29. Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 - y^2 + e^{xy}$$

et la courbe suivante :

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t)) = (t, t^2).$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + xe^{xy}, \quad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$$

On vérifie que f et γ sont de classe C^1 , puis on calcule :

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= (3x(t)^2 + y(t)e^{x(t)y(t)}) x'(t) + (-2y(t) + x(t)e^{x(t)y(t)}) y'(t) \\ &= (3t^2 + t^2e^{t^3})1 + (-2t^2 + te^{t^3})2t \\ &= 3t^2 - 4t^3 + 3t^2e^{t^3}. \end{aligned}$$

Explication de la formule : À défaut de démontrer le résultat, on peut retrouver son énoncé par des manipulations informelles sur les différentielles : la différentielle de f est donnée par

$$\mathbf{d}f_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \mathbf{d}y$$

Mais ici, on remplace x et y par les fonctions composantes $x(t)$ et $y(t)$ de γ , et donc aussi $\mathbf{d}x$ et $\mathbf{d}y$ par les différentielles $\mathbf{d}x$ et $\mathbf{d}y$ des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Comme

$$\mathbf{d}x_t = x'(t) \mathbf{d}t \quad \mathbf{d}y_t = y'(t) \mathbf{d}t$$

on obtient, en remplaçant,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) \mathbf{d}t &= \mathbf{d}(f \circ \gamma)_t \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \mathbf{d}x_t + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \mathbf{d}y_t \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) \mathbf{d}t + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \mathbf{d}t \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \right) \mathbf{d}t \end{aligned}$$

Astuce mnémotechnique : retenir la formule

$$\frac{d}{dt}(f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

en pensant que pour aller de droite à gauche, on simplifie $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

3.6 Règle de dérivation en chaîne

3.6.1 Énoncé

On peut appliquer le théorème de dérivée le long d'un arc pour le calcul des dérivées partielles de compositions de fonctions de plusieurs variables. Le cas qui nous intéressera le plus est celui de fonctions de deux variables.

Théorème 3.30. *Soit f , u , et v des fonctions C^1 de deux variables, on considère la fonction de deux variables donnée par*

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

On pense aux variables de f comme notées par (u, v) pour écrire les dérivées partielles. Alors les dérivées partielles de F sont données par :

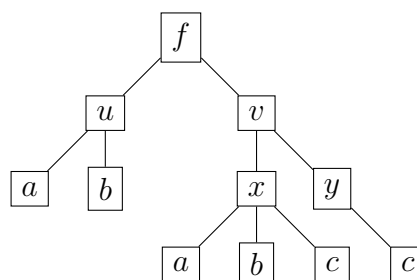
$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

Démonstration. Justifions le calcul de $\frac{\partial F}{\partial x}$. Le temps de ce calcul, la variable y est considérée comme constante, on peut donc penser à $u(x, y)$ comme une fonction d'une variable $\tilde{u}(x)$ et de même $v(x, y) = \tilde{v}(x)$. Donc on dérive une expression de la forme $f(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x))$ par rapport à x , c'est la dérivée de la fonction de deux variables f le long de l'arc de composantes $\tilde{u}(x)$ et $\tilde{v}(x)$. On obtient le résultat en appliquant le théorème précédent pour ce cas. \square

Le résultat se généralise très bien pour les fonctions avec encore plus de variables, et pour des compositions de plus de fonctions. Pour s'y retrouver, on peut faire un graphe de variables, qui résume les fonctions composées et les variables impliquées. Par exemple, si on considère la fonction

$$F(a, b, c) = f(u(a, b), v(x(a, b, c), y(c)))$$

on applique f à u et v , u est appliquée à a et b , v est appliquée à x et y ,... ce qui se résume sur le graphe suivant.



On trouve les dérivées partielles impliquées dans le calcul pour chaque variable en remontant les branches jusqu'en haut. Par exemple, pour a , on a deux branches à remonter, et la dérivée partielle est

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Il faut bien penser, à la fin à évaluer aux bons points ces dérivées partielles, ici :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a}(a, b, c) &= \frac{\partial u}{\partial a}(a, b) \frac{\partial f}{\partial u}(u(a, b), v(x(a, b, c), y(c))) \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial a}(a, b, c) \frac{\partial v}{\partial x}(x(a, b, c), y(c)) \frac{\partial f}{\partial x}(u(a, b), v(x(a, b, c), y(c))) \end{aligned}$$

On peut aussi retrouver la formule grâce aux différentielles, comme au paragraphe précédent.

3.6.2 Retour sur les coordonnées polaires

On rappelle que passer en coordonnées polaires revient à étudier la fonction $f(x, y)$ en coordonnées cartésiennes, définie sur un domaine de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, via la fonction $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, définie sur un domaine de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On peut maintenant calculer directement les dérivées partielles de g d'après les dérivées partielles de f : par dérivation à la chaîne, on a

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

En se rappelant que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on peut réécrire ces égalités sous la forme :

$$\boxed{r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

En particulier, on voit que f est constante le long des cercles centrés en l'origine si l'équation

$$-y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

est satisfaite partout, et que f est constante le long des demi-droites partant de l'origine si l'équation

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

est satisfaite partout.

On peut inverser la relation ci-dessus par des manipulations sur les équations (cf cours d'Outils Mathématiques 3 au second semestre), et écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

Attention : la forme différentielle suivante est importante et souvent utilisée.

$$d\theta_{(x,y)} = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Elle est souvent notée $d\theta$, mais attention, il ne s'agit pas d'une forme différentielle exacte ! Il est instructif d'essayer de comprendre pourquoi on la note comme ça...

3.6.3 Application aux coefficients thermoélastiques

On note $V = f(T, P)$, $T = g(V, P)$ et $P = h(T, V)$. On peut composer ces applications pour écrire des égalités, par exemple,

$$V = f(T, h(T, V))$$

En appliquant la règle de dérivation en chaîne pour calculer $\frac{\partial}{\partial V}$ de chaque côté, on obtient

$$1 = \frac{\partial h}{\partial V}(T, V) \frac{\partial f}{\partial P}(T, h(T, V))$$

ou, en notation de physicien,

$$1 = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

et on en déduit une nouvelle expression du coefficient de compressibilité isotherme

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}$$

On peut aussi appliquer $\frac{\partial}{\partial T}$ à cette égalité, pour obtenir

$$0 = \frac{\partial f}{\partial T}(T, h(T, V)) + \frac{\partial h}{\partial T}(T, V) \frac{\partial f}{\partial P}(T, h(T, V))$$

ou, en notation de physicien,

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

c'est-à-dire

$$0 = V\alpha - P\beta V\chi_T$$

ou encore

$$\boxed{\alpha = P\beta\chi_T}$$

4 Dérivées partielles secondes

4.1 Dérivées partielles secondes

Définition 4.1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, dont les fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et admettent elles-mêmes des dérivées partielles selon les deux variables. Alors on appelle **dérivées partielles secondes de f** les quatre fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Autrement dit, si on note $g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ la fonction dérivée partielle par rapport à la première variable de f , on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

et de même pour les autres dérivées partielles secondes, en partant de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemple 4.2. Considérons la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + x^2y^2$. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^2$$

En dérivant cette expression par rapport à x (en considérant comme d'habitude y constante le temps du calcul), on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 2y^2$$

En dérivant par rapport à y , on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xy$$

Pour calculer les deux autres fonctions dérivées partielles secondes, il faut commencer par calculer

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y$$

Puis les dérivées par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xy$$

et par rapport à y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x^2$$

Dans l'exemple ci-dessus on remarque que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. C'est loin d'être exceptionnel et on va énoncer à la section suivante le Théorème de Schwarz qui assure que les fonctions que nous considérerons dans ce cours vérifient toujours cette égalité !

Définition 4.3. Si la fonction f possède des dérivées partielles secondes en tout point de U , et si chacune des quatre fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont continues, on dira que f est de **classe C^2** .

On admettra que si une fonction de deux variables f est de classe C^2 alors elle est aussi de classe C^1 . On a aussi la caractérisation suivante, d'après les définitions.

Proposition 4.4. Si f est de classe C^1 , et si ses fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^1 , alors f est de classe C^2 .

4.2 Théorème de Schwarz

Nous pouvons maintenant donner l'énoncé du résultat qui relie les deux dérivées partielles secondes "croisées".

Théorème 4.5 (Théorème de Schwarz). Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , alors en tout point (x, y) de U ,

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)}.$$

Démonstration. admise □

Un premier avantage du Théorème est de simplifier les calculs : on n'avait a priori quatre dérivées partielles à calculer, mais finalement seulement trois. De plus, pour calculer la dérivée partielle seconde croisée, on peut **choisir** le chemin qui nous paraît le plus simple.

Exemple 4.6. Considérons de nouveau la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x + y) \sin(x).$$

dont les deux dérivées partielles premières ont déjà été calculées. Occupons-nous de ses dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &= \frac{d}{dx} [\sin(x) + (x + y) \cos(x)] \\ &= \frac{d}{dx} [\sin(x)] + \frac{d}{dx} [x + y] \cos(x) + (x + y) \frac{d}{dx} [\cos(x)] \\ &= \cos(x) + 1 \times \cos(x) + (x + y)(-\sin(x)) \\ &= 2 \cos(x) - (x + y) \sin(x). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\sin(x)) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin(x)) = \cos(x)$$

et ce dernier calcul est ici un peu plus rapide que celui qu'on ferait pour calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ d'après la définition.

4.3 Formes fermées et formes exactes

Définition 4.7. Soit $\omega_{(x,y)} = a(x, y) \mathbf{d}x + b(x, y) \mathbf{d}y$ une forme différentielle sur U dont on supposera que les fonctions composantes a et b sont de classe C^1 . La forme ω est **fermée** si, pour tout (x, y) dans U ,

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial b}{\partial x}(x, y)}.$$

Exemple 4.8. Les formes différentielles $\omega_{(x,y)} = a \mathbf{d}x + b \mathbf{d}y$ dont les fonctions composantes sont constantes sont des formes différentielles fermées.

Il existe beaucoup de formes différentielles qui ne sont pas fermées.

Exemple 4.9. La forme différentielle $\omega_{(x,y)} = y \mathbf{d}x - x \mathbf{d}y$ n'est pas fermée : on a

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = 1 - (-1) = 2 \neq 0.$$

La définition peut paraître étrange, mais nous allons très vite la relier à la notion de forme exacte introduite précédemment. Rappelons qu'une forme différentielle ω est exacte si elle est égale à la différentielle d'une fonction f : $\omega = \mathbf{d}f$.

Théorème 4.10. Soit $\omega_{(x,y)} = a(x, y) \mathbf{d}x + b(x, y) \mathbf{d}y$ une forme différentielle sur U dont les fonctions composantes a et b sont de classe C^1 . Si ω est exacte, alors ω est fermée.

Démonstration. En effet si $\omega = \mathbf{d}f$, alors on a

$$a(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad b(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Les fonctions a et b étant de classe C^1 , la fonction f est de classe C^2 . De plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

En appliquant le théorème de Schwarz, on obtient

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}.$$

donc ω est bien fermée. □

Par contraposition, on obtient un critère pour vérifier qu'une forme différentielle n'est **pas** exacte, sans passer par des calculs de primitives qui ne peuvent aboutir. Dans la suite, on n'écrit pas l'hypothèse que les fonctions a et b sont de classe C^1 .

Corollaire 4.11. *Si ω n'est pas fermée, alors ω n'est pas exacte.*

Attention, la réciproque du Théorème 4.10 est fautive : il existe des formes fermées et non-exactes. C'est par exemple le cas de la forme différentielle suivante, dont on a déjà parlé avec les coordonnées polaires :

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{d}y$$

définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. On vérifie facilement qu'elle est fermée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) &= \frac{d}{dy} \left[\frac{-y}{x^2 + y^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \\ &= \frac{-(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On vérifiera qu'elle n'est pas exacte dans le chapitre suivant.

4.4 Des formes fermées aux formes exactes

Dans le contre-exemple précédent, il est essentiel que le domaine de définition U contienne un "trou" en l'origine. En fait, sur un domaine "sans trou", toute forme fermée est exacte. La formalisation mathématique serait un peu trop avancée pour ce cours, contentons nous d'un énoncé informel.

Théorème 4.12 (Lemme de Poincaré, hors programme). *Si U est un domaine de \mathbb{R}^2 "sans trou", alors toute forme différentielle fermée sur U est exacte.*

En particulier, si on restreint la forme précédente à un domaine "sans trou", elle deviendra exacte. On peut même donner des primitives explicites : considérons la fonction $f(x, y) = \arctan(y/x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On calcule, en utilisant la dérivée usuelle $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-y}{x^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \\ &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{d}f_{(x,y)} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{d}y$$

Le domaine $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est "sans trou" : il s'agit de tout un demi-plan. D'autres exemples de domaines sans trous : le plan \mathbb{R}^2 tout entier, l'intérieur d'un disque, l'intérieur d'un rectangle,...

4.5 Exemples d'EDP d'ordre deux

Terminons ce petit chapitre par quelques exemples d'équations aux dérivées partielles qui font intervenir des dérivées partielles d'ordre deux. C'est le cas d'équations très importantes de la physique, dont nous donnons ici seulement des cas particulier très simples.

4.5.1 Équation de la chaleur unidimensionnelle

L'évolution dans le temps de la température en tout point d'une barre peut être décrite par une fonction $u(t, x)$ de deux variables réelles : le temps t et la position sur la barre x . Cette fonction vérifie alors une équation de la chaleur de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

où A est une constante strictement positive. Cette EDP admet beaucoup de solutions : par exemple

$$u(t, x) = e^{-4t} \sin(2x) + 100$$

est solution avec $A = 1$. En effet, on calcule

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -4e^{-4t} \sin(2x) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 2e^{-4t} \cos(2x)$$

et donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = -4e^{-4t} \sin(2x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$$

On impose souvent que la solution vérifie des conditions au bord du domaine considéré, et notamment, on s'intéresse souvent à l'évolution à partir d'une répartition de chaleur initiale $u_{t=0}$ fixée.

4.5.2 Équation des cordes vibrantes

L'équation des cordes vibrantes, ou équation des ondes unidimensionnelle, décrit la propagation d'une onde dans un espace de dimension un, par exemple, la vibration d'une corde de guitare. Si x représente la position le long de la corde, t le temps, et $u(t, x)$ la distance à l'équilibre à la position x et au temps t , la fonction u vérifie l'EDP :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

pour une constante positive c .

On vérifie facilement, par dérivation à la chaîne, que toute fonction de la forme

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

où F et G sont des fonctions d'une variable, est solution de l'équation des ondes. En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -cF'(x - ct) + cG'(x + ct) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = F'(x - ct) + G'(x + ct)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 F''(x - ct) + c^2 G''(x + ct) = c^2 (F''(x - ct) + G''(x + ct)) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

On se rappelle qu'on a déjà vu des fonctions de la forme $F(x - ct)$ avec l'équation de transport. Il s'agit donc d'une onde "progressive" : elle se déplace dans la direction où x augmente. Pour $G(x + ct)$, il s'agit d'une onde "régressive". Les solutions de l'équation des ondes ci-dessus sont donc une superposition (une somme) d'ondes progressives et régressives.

En fait, toutes les solutions à l'équation des ondes unidimensionnelle sont de cette forme.

Complément non traité en CM

On peut le justifier par la règle de dérivation à la chaîne de manière similaire à ce qu'on a fait pour l'équation de transport unidimensionnelle. Considérons une solution quelconque $u(t, x)$ de l'équation des ondes. Considérons une nouvelle fonction $v(y, z)$ des nouvelles variables y et z , définie par

$$v(y, z) = u\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right)$$

On calcule, par dérivation à la chaîne,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(y, z) = \frac{-1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}(y, z) &= \frac{-1}{2c} \left(\frac{1}{2c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2c} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right) \right) \\ &= \frac{-1}{4c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{z - y}{2c}, \frac{y + z}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par l'équation des ondes.

Alors la fonction $\frac{\partial v}{\partial y}(y, z)$ a sa dérivée partielle par rapport à z qui est nulle. D'après le Théorème 3.14, c'est donc une fonction de y uniquement :

$$\frac{\partial v}{\partial y}(y, z) = c(y)$$

Maintenant, v est une primitive de cette fonction par rapport à la variable y , donc en notant $F(y)$ une primitive de la fonction $c(y)$, on a

$$v(y, z) = F(y) + G(z)$$

Finalement, on conclut en écrivant

$$u(t, x) = v(x - ct, x + ct) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

5 Intégrale le long d'un chemin

5.1 Arcs paramétrés et chemins orientés

Définition 5.1. Soit U une partie de \mathbb{R}^2 . Un **arc régulier par morceaux** dans U est un arc paramétré :

$$\gamma : I = [t_0, t_n] \rightarrow U, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

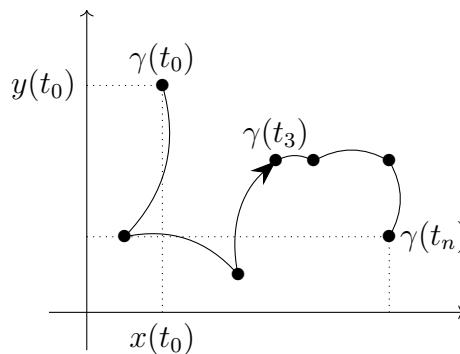
de classe C^0 , avec des temps $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n$ tels que la restriction de γ au sous-intervalles ouverts de la forme $]t_k, t_{k+1}[$ soit de classe C^1 . On notera alors $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ les segments qui composent I . On suppose de plus que pour tout point $(x, y) \in U$, il y a au plus un nombre fini de $t \in I$ tels que $\gamma(t) = (x, y)$ (on autorise un chemin à se croiser lui-même, mais seulement un nombre fini de fois).

Définition 5.2. Un **chemin orienté régulier par morceaux** dans U est l'image \mathcal{C} d'un arc régulier par morceaux γ dans U :

$$\mathcal{C} = \gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}.$$

muni du sens de parcours défini par γ . On dit que γ est un **paramétrage** du chemin \mathcal{C} .

Le sens de parcours est bien défini grâce à l'hypothèse supplémentaire qu'on a fait sur le chemin : puisque le chemin est continu et ne peut pas repasser deux fois sur une même section de courbe, il y a bien un sens de parcours.



Exemple 5.3. L'arc suivant est régulier par morceaux et paramètre le cercle unité \mathcal{C} , parcouru dans le sens trigonométrique (le sens inverse des aiguilles d'une montre) :

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Ici, $t_0 = 0$ et $t_1 = t_n = 2\pi$. Pour obtenir le cercle unité parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, on peut considérer l'arc $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(2\pi - t) = (\cos(t), -\sin(t))$.

Attention, dans le chemin \mathcal{C} on a retenu seulement le sens de parcours, pas, par exemple, la vitesse de parcours.

Exemple 5.4. Le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique admet aussi pour paramétrage l'arc

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

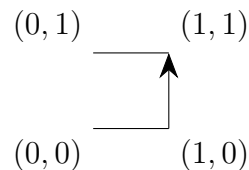
et beaucoup d'autres...

En particulier, on peut avoir des paramétrage très complexes pour des chemins très simples.

Exemple 5.5. On considère l'arc régulier par morceaux $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini de la manière suivante :

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{pour } t \in [0, 1] \\ (1, \sin(t-1)) & \text{pour } t \in [1, 1 + \frac{\pi}{2}] \\ (1 - \frac{t-(1+\frac{\pi}{2})}{3-\frac{\pi}{2}}, 0) & \text{pour } t \in [1 + \frac{\pi}{2}, 4] \end{cases}$$

Alors le chemin parcouru est juste formé par trois côtés du carré de côté un, dont le bord inférieur gauche est le point de départ et parcouru dans le sens trigonométrique.



Dans l'exemple du cercle, on a $\gamma(t_0) = \gamma(t_n)$, ce qui est un cas très particulier qui mérite une définition.

Définition 5.6. Un arc régulier par morceaux γ est dit **fermé** si ses extrémités sont confondues :

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_n).$$

Un chemin orienté associé à un tel arc sera appelé un **lacet** (orienté).

5.2 Intégrale d'une forme différentielle le long d'un arc

Définition 5.7. Soit U une partie de \mathbb{R}^2 et $\gamma : I = [t_0, t_n] \rightarrow U$ un arc régulier par morceaux dans U . Soit ω une forme différentielle à composantes continues sur U . **L'intégrale de la forme ω le long de l'arc γ** est le nombre suivant :

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{t_0}^{t_1} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

Afin de bien comprendre le signification de l'écriture ci dessus, notons

$$\omega_{(x,y)} = a(x,y) \mathbf{d}x + b(x,y) \mathbf{d}y \quad \text{et} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Alors on a $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ (en dehors éventuellement des points t_0, t_1, \dots, t_n où l'arc n'est pas dérivable). La fonction

$$F(t) = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

est bien définie en dehors de ces mêmes points, et vaut

$$F(t) = a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)$$

Remarque 5.8. En particulier, lorsque $\omega = \mathbf{d}f$, il s'agit de la dérivée de f le long de l'arc γ . On reviendra très vite sur cette remarque fondamentale.

La fonction d'une variable $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est donc continue sur chaque sous-intervalle I_k , on peut considérer son intégrale, et on a par conséquent :

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} F(t)dt$$

qui est bien définie.

Exemple 5.9. Considérons l'arc $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, et la forme différentielle $\omega_{(x,y)} = x \, dx + dy$. On a alors

$$\begin{aligned} F(t) &= \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ &= a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t) \\ &= \cos(t) \times (-\sin(t)) + \cos(t) \end{aligned}$$

Alors on a

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t) + \cos(t)) \, dt$$

Pour calculer une telle intégrale, on peut utiliser une primitive de l'intégrande (la fonction qu'on intègre). Ici,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= [\cos^2(t) + \sin(t)]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car la primitive est 2π -périodique ici !

Lorsqu'on fait l'intégrale sur un arc régulier par morceaux où il y a effectivement plusieurs morceaux $I = I_0 \cup I_1 \cup \cdots \cup I_{n-1}$, il est clair d'après la définition qu'on peut faire le calcul de l'intégrale sur chaque morceaux, puis faire la somme des contributions. Autrement dit, en notant $\gamma_k = \gamma|_{I_k}$ la restriction de γ au segment I_k , qui est aussi un arc régulier, on a

$$\boxed{\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\gamma_1} \omega + \cdots + \int_{\gamma_{n-1}} \omega}$$

Exemple 5.10. Considérons l'arc $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t) & \text{pour } t \in [0, 1] \\ (1, t) & \text{pour } t \in [1, 2] \end{cases}$$

et la forme $\omega_{(x,y)} = xy \, dx + y^2 \, dy$. Alors on a $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$ et $\gamma_1 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1, t)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \omega &= \int_0^1 2t^2 \, dt \\ &= \left[\frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \omega &= \int_1^2 t^2 \, dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Et, finalement,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\gamma_1} \omega = \frac{9}{3}$$

5.3 Exemples en thermodynamique

On considère une transformation d'un gaz parfait, dont l'état est encodé par ses variables d'état P , V et T reliées par une équation d'état $PV = kT$. On utilise P et V comme variables, et on représente la transformation par un arc dans un diagramme de Clapeyron. Notons $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (V(t), P(t))$ cet arc. La quantité infinitésimale de travail reçu par le gaz, due uniquement aux forces de pressions, s'écrit

$$\delta W_{(V,P)} = -P \, dV$$

Il s'agit d'une forme différentielle. On note de plus que cette forme différentielle n'est pas fermée, donc pas exacte, car

$$\frac{d}{dP}[-P] = -1 \neq 0 = \frac{d}{dV}[0]$$

Si γ est un arc régulier (en un seul morceau), alors on peut intégrer la quantité infinitésimale de travail le long de l'arc, ce qui nous donne le travail total reçu par le gaz lors de la transformation :

$$\int_{\gamma} \delta W = \int_{t_0}^{t_1} -P(t)V'(t) \, dt$$

Lorsqu'on impose des conditions supplémentaires sur la transformation, on obtient en général une expression plus simple du travail.

Exemple 5.11. Une transformation est **isochore** si elle s'effectue à volume constant, c'est-à-dire, si la fonction $V(t)$ est constante. Dans ce cas, $V'(t) = 0$, donc le travail total est nul. Dans le diagramme de Clapeyron, il s'agit d'un arc dont l'image est sur une droite parallèle à l'axe des pressions.

Exemple 5.12. Une transformation est **isobare** si elle s'effectue à pression constante, c'est-à-dire, si la fonction $P(t) = P_0$ est constante. Dans le diagramme de Clapeyron, il s'agit d'un arc dont l'image est sur une droite parallèle à l'axe des volumes. Dans ce cas, on a

$$\int_{\gamma} \delta W = \int_{t_0}^{t_1} -P_0 V'(t) \, dt = -P_0 [V(t)]_{t_0}^{t_1} = -P_0 (V(t_1) - V(t_0))$$

En particulier, le travail reçu **dans ce cas** ne dépend que des volumes initial et final, et de la pression (constante).

Exemple 5.13. Une transformation est **isotherme** si elle s'effectue à température constante, disons égale à T_0 . Vu l'équation d'état, ça signifie que $P(t)V(t) = kT_0$ pour tout t . En particulier, on a $V(t) = \frac{kT_0}{P(t)}$ et $V'(t) = \frac{-kT_0 P'(t)}{P(t)^2}$. Ainsi on peut écrire

$$\int_{\gamma} \delta W = kT_0 \int_{t_0}^{t_1} \frac{P'(t)}{P(t)} = kT_0 \ln \left(\frac{P(t_1)}{P(t_0)} \right)$$

Étant donnée l'équation d'état, on peut aussi écrire ceci comme

$$\int_{\gamma} \delta W = kT_0 \ln \left(\frac{V(t_0)}{V(t_1)} \right)$$

Là encore, le travail reçu **dans ce cas** ne dépend que des volumes initial et final, et de la température (constante).

Dans ces transformations bien choisies, le travail reçu ne dépend que des états initial et final, mais ce n'est pas le cas en général! En général, l'intégrale d'une forme différentielle le long d'un arc dépend de l'arc, ou plutôt du chemin (l'image de l'arc, avec le sens de parcours). Nous allons démontrer ce résultat, et nous verrons un peu plus tard des exemples qui montrent pourquoi l'intégrale dépend en général du chemin et pas seulement des points de départ et d'arrivée.

5.4 L'intégrale ne dépend pas du paramétrage

Théorème 5.14. Soit γ un arc régulier par morceaux dans U , et ω une forme différentielle à composantes continues sur U . Alors l'intégrale de ω le long de l'arc γ ,

$$\int_{\gamma} \omega$$

ne dépend pas du paramétrage γ mais seulement du chemin orienté associé $\mathcal{C} = \gamma(I)$.

Attention! Ici, on parle de chemin orienté, c'est-à-dire que même si on peut oublier le paramétrage, on n'oublie pas le sens de parcours du chemin. En particulier, il y a un point de départ et un point d'arrivée. De plus, on rappelle qu'on suppose que le chemin est parcouru une seule fois.

Démonstration. Pour simplifier, supposons que l'arc est régulier, c'est-à-dire qu'il y a un seul sous-intervalle dans la subdivision :

$$\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U : t \mapsto \gamma(t).$$

Considérons à présent un changement de paramètre $s \mapsto t$, c'est-à-dire une fonction

$$\varphi : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1] : s \mapsto \varphi(s) = t$$

de classe C^1 à dérivée φ' strictement positive **pour que le sens de parcours reste le même!** et telle que $\varphi(s_0) = t_0$ et $\varphi(s_1) = t_1$. Posons ensuite

$$\tilde{\gamma} : J = [s_0, s_1] \rightarrow U : s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$$

autrement dit : $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ et γ sont deux paramétrages différents du même chemin :

$$\mathcal{C} = \tilde{\gamma}([s_0, s_1]) = \gamma([t_0, t_1]).$$

L'expression suivante de la dérivée de $\tilde{\gamma}$ découle de la règle de dérivation à la chaîne, mais on va la redémontrer rapidement.

Lemme : $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Preuve du lemme : Soit $s \in J$, on a :

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \varphi)'(s) &= ((x \circ \varphi)'(s), (y \circ \varphi)'(s)) \\ &= (x'(\varphi(s))\varphi'(s), y'(\varphi(s))\varphi'(s)) \\ &= \varphi'(s) (x'(\varphi(s)), y'(\varphi(s))) \\ &= \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s)). \end{aligned}$$

□

Revenons à présent à notre démonstration principale et considérons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} F(t) &:= \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ \tilde{F}(s) &:= \omega_{\tilde{\gamma}(s)}(\tilde{\gamma}'(s)). \end{aligned}$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= \omega_{\gamma(\varphi(s))}((\gamma \circ \varphi)'(s)) \\ &= \omega_{\gamma(\varphi(s))}(\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)) \\ &= \varphi'(s) \omega_{\gamma(\varphi(s))}(\gamma'(\varphi(s))) \\ &= \varphi'(s) F(\varphi(s)) \end{aligned}$$

Ainsi, en notant G une primitive de F , on a

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \omega &= \int_{s_0}^{s_1} \tilde{F}(s) ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} F(\varphi(s))\varphi'(s) ds \\ &= [G(\varphi(s))]_{s_0}^{s_1} \\ &= [G(t)]_{t_0}^{t_1} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt \\ &= \int_{\gamma} \omega \end{aligned}$$

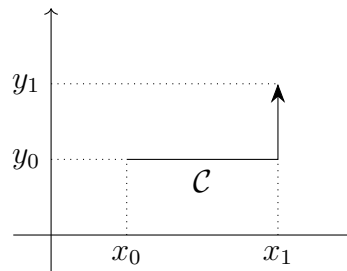
□

À partir de maintenant on pourra donc noter :

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \omega}$$

et ne plus spécifier désormais que le chemin orienté \mathcal{C} et non son paramétrage Γ . En pratique, pour calculer cette intégrale, on utilisera un paramétrage, mais on pourra **choisir** le paramétrage le plus adapté.

Exemple 5.15. Soit $\omega(x, y) = a(x, y) \mathbf{d}x + b(x, y) \mathbf{d}y$ une forme différentielle sur \mathbb{R}^2 et considérons le chemin régulier par morceaux \mathcal{C} suivant :



On peut choisir pour le morceau horizontal le paramétrage suivant :

$$\gamma_0 : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_0(t) = (t, y_0)$$

et pour le morceau vertical :

$$\gamma_1 : [y_0, y_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_1(t) = (x_1, t)$$

On calcule immédiatement leurs dérivées respectives :

$$\gamma_0'(t) = (1, 0) \quad \gamma_1'(t) = (0, 1).$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\gamma_1} \omega \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \omega_{\gamma_0(t)}(\gamma_0'(t)) dt + \int_{y_0}^{y_1} \omega_{\gamma_1(t)}(\gamma_1'(t)) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (a(t, y_0) \mathbf{d}x + b(t, y_0) \mathbf{d}y)(1, 0) dt + \int_{y_0}^{y_1} (a(x_1, t) \mathbf{d}x + b(x_1, t) \mathbf{d}y)(0, 1) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_1} a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^{y_1} b(x_1, t) dt \end{aligned}$$

Définition 5.16. Soit ω une forme différentielle à composantes continues sur U et \mathcal{C} un lacet dans U . On notera :

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega := \int_{\mathcal{C}} \omega$$

l'intégrale de ω le long de \mathcal{C} et on l'appellera **circulation de ω le long du lacet \mathcal{C}** .

5.5 Un exemple de cycle thermodynamique : le cycle de Carnot

On considère à nouveau un gaz parfait monoatomique, qui subit un cycle de transformations réversibles formées de :

- une transformation adiabatique de (P_0, V_0, T_0) à (P_1, V_1, T_1) , avec $T_1 > T_0$,
- une détente isotherme de (P_1, V_1, T_1) à (P_2, V_2, T_1) ,
- une transformation adiabatique de (P_2, V_2, T_1) à (P_3, V_3, T_0) ,
- une compression isotherme de (P_3, V_3, T_0) à (P_0, V_0, T_0) .

On connaît déjà l'allure d'une transformation isotherme dans le diagramme de Clapeyron, et on a déjà déterminé le travail reçu dans ce cas. Pour une transformation adiabatique réversible $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (V(t), P(t))$, d'après la loi de Laplace, on a

$$P(t)^{\frac{3}{5}}V(t) = C$$

où C est une constante. On peut donc écrire

$$V(t) = CP(t)^{-\frac{3}{5}} = Ce^{-\frac{3}{5}\ln P(t)} \quad V'(t) = -\frac{3CP'(t)}{5P(t)}e^{-\frac{3}{5}\ln P(t)} = -\frac{3CP'(t)}{5P(t)}P(t)^{-\frac{3}{5}}$$

et calculer

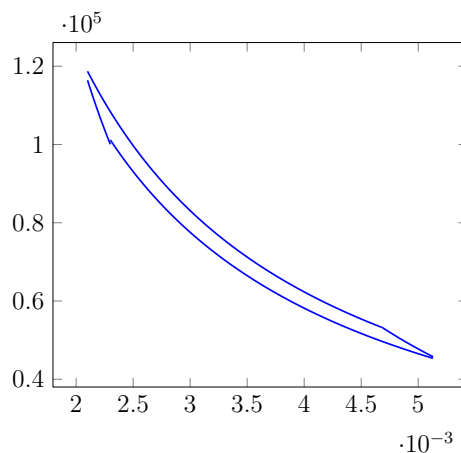
$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} -P(t)V'(t) \, dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{3}{5}CP'(t)P(t)^{-\frac{3}{5}} \, dt \\ &= \left[\frac{3C}{2}P(t)^{\frac{2}{5}} \right]_{t_0}^{t_1} \\ &= \frac{3}{2}(CP(t_1)^{\frac{2}{5}} - CP(t_0)^{\frac{2}{5}}) \\ &= \frac{3}{2}k(T(t_1) - T(t_0)) \end{aligned}$$

en réappliquant la loi de Laplace et l'équation d'état, pour $T(t) = \frac{1}{k}P(t)V(t)$.

En sommant toutes les contributions, on obtient le travail total reçu lors d'un cycle de Carnot :

$$\frac{3}{2}k(T_1 - T_0) + kT_1 \ln(V_1/V_2) + \frac{3}{2}k(T_0 - T_1) + kT_0 \ln(V_3/V_0)$$

On remarque que les contributions des deux transformations adiabatiques se compensent, mais pas celles des transformations isothermes, et on peut vérifier que, comme $T_1 > T_0$, ce travail reçu est négatif. Autrement dit, le gaz produit du travail lors d'un cycle de Carnot.



6 Cas des formes exactes

6.1 Le théorème et ses conséquences

Le cas des formes exactes est très particulier en ce qui concerne l'intégration sur un chemin, c'est l'objet du résultat suivant, le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 6.1. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et \mathcal{C} un chemin régulier par morceaux orienté joignant un point (x_0, y_0) à un point (x_1, y_1) dans le domaine U . Alors :*

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{d}f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}.$$

Exemple 6.2. Considérons la forme différentielle définie sur le domaine $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (des points (x, y) avec $x > 0$), par

$$\omega_{(x,y)} = y \ln(x) \, \mathbf{d}x + (x \ln(x) - x) \, \mathbf{d}y$$

Essayons d'intégrer cette forme sur le segment \mathcal{C} reliant $(1, 1)$ à $(2, 2)$. On peut écrire

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_1^2 (t \ln(t) + t \ln(t) - t) dt$$

Cette intégrale n'est pas évidente à calculer (on s'en sortirait par intégration par parties cf OM1). Vu le théorème, on peut se demander si ω est exacte, et dans ce cas, si ça aide à calculer le résultat. On vérifie facilement que ω est fermée (et on peut observer en passant que la dérivée de $x \ln(x) - x$ par rapport à x donne $\ln(x)$, ce qu'on pourrait aussi trouver par intégration par parties), donc il y a de l'espoir. Pour trouver une primitive de ω , il est plus simple ici de commencer par intégrer le facteur devant $\mathbf{d}y$. On trouve alors, après une rapide vérification, la primitive $f(x, y) = y(x \ln(x) - x)$. Finalement, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = f(2, 2) - f(1, 1) = 4 \ln(2) - 3$$

Avant de faire la démonstration, qui repose sur le théorème qui exprime la dérivée d'une fonction le long d'un arc en fonction de la différentielle de la fonction, passons en revue quelques conséquences.

Une conséquence directe du théorème est que, lorsque ω est une forme exacte, son intégrale le long de \mathcal{C} ne dépend que des extrémités de \mathcal{C} et non de sa "forme". Soit encore :

$$\omega \text{ exacte} \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \omega$$

dès que les deux chemins orientés réguliers par morceaux \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ ont les mêmes extrémités. La remarque précédente nous fournit ainsi, par contraposition, un moyen pratique pour montrer qu'une forme n'est pas exacte : il suffit de trouver deux chemins \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ de mêmes extrémités et tels que :

$$\int_{\mathcal{C}} \omega \neq \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \omega$$

Ce théorème peut être considéré comme une généralisation à deux variables du théorème d'analyse suivant.

Théorème 6.3. *Si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et à dérivée continue, alors*

$$\int_a^b h'(t)dt = h(b) - h(a).$$

Notons enfin un dernier corollaire important :

Corollaire 6.4. *Si ω est exacte sur U et si \mathcal{C} est un lacet dans U , alors :*

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = 0.$$

Démonstration.

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{d}f = f(N) - f(M) = 0.$$

puisque M et N sont confondus. □

Remarque 6.5. Là encore, on obtient une condition suffisante de non-exactitude : si on peut trouver un chemin fermé \mathcal{C} tel que la circulation de ω le long de \mathcal{C} ne soit pas nulle, alors ω ne peut pas être exacte. Nous utiliserons cet outil pratique dans la prochaine section.

Exemple 6.6. Cette propriété est essentielle en physique, liée au premier principe de la thermodynamique et aux principes de conservation en général : il existe une fonction d'état U d'un système, l'énergie interne, telle que, dans une situation où il n'y a pas de variation d'énergie cinétique macroscopique et d'action de forces conservatives extérieures, on ait

$$\mathbf{d}U = \delta W + \delta Q$$

où δW représente la quantité infinitésimale de travail reçu, et δQ la quantité infinitésimale de chaleur reçue de l'extérieur. Les notations sont cohérentes : $\mathbf{d}U$ est la différentielle de la fonction U , c'est une forme différentielle exacte (on dit parfois différentielle totale en Physique). Les deux autres ingrédients δW et δQ sont des formes différentielles, qui ne sont pas, en général, exactes. On a calculé dans le cycle de Carnot le travail total reçu par le gaz au cours d'un cycle. D'après le premier principe et le résultat de ce chapitre sur l'intégration des formes exactes, on en déduit qu'on a aussi calculé la quantité de chaleur totale reçue par le gaz au cours d'un cycle de Carnot :

$$\oint_{\mathcal{C}} \delta Q = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{d}U - \oint_{\mathcal{C}} \delta W = - \oint_{\mathcal{C}} \delta W$$

Attention, en général, il n'est pas forcément simple de trouver une primitive d'une forme exacte. Par exemple, l'énergie interne d'un gaz est rarement donnée par une expression explicite. Par contre, si on sait qu'une forme est exacte sans connaître sa primitive, on peut quand même utiliser le théorème via sa première conséquence : comme l'intégrale ne dépend pas du chemin mais seulement des points de départ et d'arrivée, on peut choisir le chemin qui nous paraît le plus simple pour faire le calcul.

6.2 Exemple de forme fermée, non exacte

On se place dans $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et on considère la forme différentielle ω sur U définie par

$$\omega_{(x,y)} = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{dx} - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{dy}.$$

ω est fermée : en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{(-1)(x^2 + y^2) - (-x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

ω n'est pas exacte : considérons l'arc fermé suivant

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U : t \mapsto \gamma(t) := (\cos(t), \sin(t)).$$

C'est bien un arc fermé dans U (il ne passe pas par l'origine) et le lacet associé est le cercle-unité. D'autre part, la dérivée en t est :

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Calculons alors la circulation de ω le long de γ :

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \mathbf{dx} + \frac{-\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \mathbf{dy} \right) (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} dt \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

Comme la circulation de ω le long de l'arc fermé γ n'est pas nulle, il s'ensuit (d'après le corollaire) que ω ne peut pas être exacte. Cet exemple nous montre donc qu'il existe des formes différentielles fermées qui ne sont pas exactes.

Il s'agit en fait de la forme différentielle $-\mathbf{d}\theta$, l'opposé de la forme différentielle $\mathbf{d}\theta$ croisée au chapitre 3. On a aussi une autre manière de comprendre la notation : en utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on vérifie facilement que l'intégrale de $-\mathbf{d}\theta$ le long d'une portion \mathcal{C} du cercle unité, correspondant à un angle ϕ , parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, donne $\int_{\mathcal{C}} -\mathbf{d}\theta = \phi$. Autrement dit, en intégrant $-\mathbf{d}\theta$, on calcule l'angle orienté dans le sens des aiguilles d'une montre. Comme l'angle n'est pas bien défini (seulement à un multiple de 2π près), on n'a pas de primitive.

6.3 Preuve du Théorème 6.1

Commençons par traiter le cas d'un chemin régulier (en un seul morceau), paramétré par un arc régulier $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Par définition, on souhaite intégrer entre t_0 et t_1 la fonction de t donnée par $\mathbf{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$. On se rappelle alors le Théorème 3.27 qui dit que cette valeur est exactement la valeur de la dérivée de la fonction composée $f \circ \gamma$ en t . Autrement dit, on cherche l'intégrale d'une dérivée :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{d}f &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= [f \circ \gamma(t)]_{t_0}^{t_1} \\ &= f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)) \end{aligned}$$

Puisque $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$ sont les points d'origine et d'arrivée du chemin, on a bien démontré le résultat.

Dans le cas plus général d'un chemin orienté régulier par morceaux, on décompose le chemin \mathcal{C} en morceaux réguliers $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{n-1}$, et pour chacun de ces morceaux réguliers, on note (x_i, y_i) le point d'origine et (x_{i+1}, y_{i+1}) le point d'arrivée, qui est le point de départ du morceau suivant si on n'a pas fini. On a alors, par ce qu'on a déjà montré,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{d}f &= \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{d}f + \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{d}f + \dots + \int_{\mathcal{C}_{n-1}} \mathbf{d}f \\ &= f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) + f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1) + \dots + f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ &= f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

par télescopage.

6.4 Une réciproque

Nous allons expliquer, sans tous les détails, une sorte de réciproque au théorème principal de ce chapitre : si l'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin quelconque ne dépend que des points de départs et d'arrivée, alors la forme différentielle est en fait exacte.

Théorème 6.7. *Soit ω une forme différentielle à composantes continues sur un domaine U connexe par arcs (entre deux points quelconques on peut trouver un arc). On suppose que, pour tout chemin \mathcal{C} orienté régulier par morceaux d'origine (x_0, y_0) et d'arrivée (x_1, y_1) , l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \omega$ ne dépend que de ces deux points. Alors ω est une forme exacte.*

Démonstration. Fixons un point de référence (x_0, y_0) dans U . On considère la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \int_{\mathcal{C}} \omega$$

où \mathcal{C} est un chemin orienté régulier par morceaux d'origine (x_0, y_0) et d'arrivée (x, y) . Cette fonction est bien définie (elle ne dépend pas des choix de \mathcal{C}) par hypothèse. Il faut maintenant vérifier que c'est une primitive de ω .

Nous allons l'expliquer pour la première fonction composantes $a(x, y)$ de ω : on veut montrer que $a(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Pour ceci on revient à la définition de cette dérivée partielle comme limite :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon, y) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

Soit \mathcal{C} un chemin orienté régulier par morceaux d'origine (x_0, y_0) et d'arrivée (x, y) , et \mathcal{C}' le chemin orienté régulier par morceaux d'origine (x_0, y_0) et d'arrivée $(x + \varepsilon, y)$ obtenu en rajoutant à \mathcal{C} le morceau de segment horizontal entre (x, y) et $(x + \varepsilon, y)$. On a alors

$$f(x + \varepsilon, y) - f(x, y) = \int_0^\varepsilon a(x + t, y) dt$$

En divisant par ε et en prenant la limite, il découle de la continuité de a que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x, y)$$

□

7 Le point de vue des champs de vecteurs

7.1 Définition des champs de vecteurs

Définition 7.1. Une fonction $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie sur un domaine U de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^2 est appelée un **champ de vecteur** sur U . On peut écrire $\vec{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ et les fonctions f_1 et f_2 sont des fonctions de deux variables à valeurs réelles, appelées les *fonctions composantes* de \vec{F} . On dit que \vec{F} est de classe C^0 , C^1 , C^2 si les deux fonctions composantes f_1 et f_2 le sont.

Comme souvent dans le cours, on pourrait étendre les définitions à trois variables ou plus. Dans le cas des champs de vecteurs, l'important est qu'il y a autant de variables que de fonctions composantes. L'autre point important, si on veut que les champs de vecteurs aient un sens, est que les deux variables soient des grandeurs comparables, en pratique toutes les deux des distances. Autrement dit, quand on parle de champs de vecteur, on pense vraiment à l'entrée comme une position, et à la sortie comme un vecteur avec une certaine amplitude, pointant dans une certaine direction.

Exemple 7.2. Les champs de vecteurs se croisent très souvent :

- dans les cartes météo, on avait vu la représentation des vents par des champs de vecteurs,
- le champ gravitationnel est donné par un champ de vecteur : la force de gravitation est un vecteur orienté,

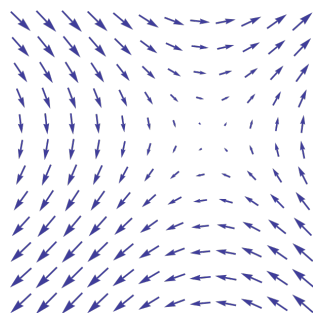
- de même, un champ magnétique ou un champ électrique sont encodés par des champs de vecteurs.

Comme dans les cartes météo, on peut représenter un champ de vecteur en traçant quelques valeurs : pour un certain nombre de points (x, y) de U , on trace le vecteur $\vec{F}(x, y)$ en partant de (x, y) . Autrement dit, on trace une flèche entre (x, y) et $(x, y) + \vec{F}(x, y) = (x + f_1(x, y), y + f_2(x, y))$.

Exemple 7.3. Considérons le champ de vecteur sur \mathbb{R}^2 défini par :

$$\vec{F}(x, y) = (\sin(x), \sin(y))$$

Alors une représentation (sur une partie de $U = \mathbb{R}^2$) est donnée par :



Exercice 1. Donner l'allure des champs de vecteurs suivants :

1. $\vec{F}(x, y) = (1, 0)$
2. $\vec{F}(x, y) = (x, y)$
3. $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$
4. $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$, défini seulement sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

7.2 Gradient d'une fonction

Une construction importante de champ de vecteur, dont on va voir qu'elle est très liée à la notion de différentielle d'une fonction, est celle de champ de vecteur gradient.

Définition 7.4. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, de classe C^1 . Le **gradient** de f est le champ de vecteur $\vec{\nabla} f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Exemple 7.5. Pour la fonction f définie par $f(x, y) = \sin(x) \cos(xy)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x) \cos(xy) - y \sin(x) \sin(xy) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin(x) \sin(xy)$$

donc

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (\cos(x) \cos(xy) - y \sin(x) \sin(xy), -x \sin(x) \sin(xy))$$

Pour faire le lien avec la différentielle, on a besoin de la notion de produit scalaire : étant donnés deux éléments (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de \mathbb{R}^2 (pensés plutôt comme des vecteurs : le vecteur qui fait passer de $(0, 0)$ à (x_1, y_1) et le vecteur qui fait passer de $(0, 0)$ à (x_2, y_2)), leur **produit scalaire** est le nombre

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Vous en avez très certainement déjà entendu parler, ainsi que de son interprétation géométrique. Rappelons simplement que $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = 0$ si les vecteurs (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont orthogonaux, et que $(x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2$ est la distance au carré entre $(0, 0)$ et (x, y) .

On peut alors relier le gradient de f et la différentielle de f par la formule :

$$\mathbf{d}f_{(x,y)}(u, v) = \vec{\nabla} f(x, y) \cdot (u, v)$$

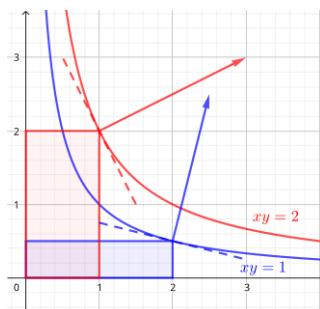
pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Cette égalité découle de la définition du produit scalaire, et de la formule qu'on a déjà appliqué de nombreuses fois, qui est essentiellement la définition de la différentielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}f_{(x,y)}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \mathbf{d}x(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \mathbf{d}y(u, v) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times u + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times v \\ &= \vec{\nabla} f(x, y) \cdot (u, v) \end{aligned}$$

Interprétation graphique du gradient :

- le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau,
- il pointe dans la direction vers laquelle f augmente le plus vite,
- il s'annule exactement aux points critiques de f .

Exemple 7.6. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$. Les lignes de niveau pour f sont des hyperboles. On a $\vec{\nabla} f(x, y) = (y, x)$.



7.3 Champs de vecteurs et formes différentielles

On remarque que les champs de vecteurs et les formes différentielles sont définies par les mêmes données : deux fonctions composantes. Ce n'est pas une coïncidence : à tout champ de vecteur on peut associer une forme différentielle. Réciproquement, c'est vrai aussi mais ça n'a du sens que sous les hypothèses plus haut : les deux variables doivent être comparables et à la même échelle, typiquement des distances en m, mais pas une pression et un volume ! En particulier, on peut utiliser les outils développés pour les formes différentielles dans le cadre des champs de vecteurs.

Plus explicitement, au champ de vecteur $\vec{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, on peut associer la forme différentielle

$$\omega_{(x,y)} = f_1(x, y) \, \mathbf{dx} + f_2(x, y) \, \mathbf{dy} = \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

où la dernière partie est une **notation** pour nous. Il faut penser à $d\vec{r}$ comme à un vecteur dont les coordonnées sont \mathbf{dx} et \mathbf{dy} , et $\vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$ est le produit scalaire dans ce sens.

Définition 7.7. Soit \vec{F} un champ de vecteur de classe C^0 (au moins) sur le domaine U , et \mathcal{C} un chemin orienté régulier par morceaux dans U . L'**intégrale** de F le long du chemin \mathcal{C} est

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemple 7.8. Calculons l'intégrale du champ de vecteur \vec{F} défini par $\vec{F}(x, y) = (x^2y, y)$, sur le segment reliant $(-1, 2)$ à $(2, -1)$ avec ce sens de parcours. Commençons par trouver un arc régulier qui paramètre ce segment. On rappelle que pour trouver ceci, si le segment n'est pas vertical, on peut commencer par trouver l'équation de la droite qui contient le segment, ici

$$y = 1 - x$$

puis utiliser l'abscisse comme paramètre, ce qui donne

$$\gamma : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t, 1 - t)$$

On calcule maintenant la fonction à intégrer, d'après la définition. En notant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on peut retenir que la fonction s'obtient en faisant le produit scalaire

$$\vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))$$

Puisque ici, $x'(t) = 1$ et $y'(t) = -1$, ça donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-1}^2 (t^2(1-t) - (1-t)) dt \\ &= \int_{-1}^2 (-t^3 + t^2 + t - 1) dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t \right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Définition 7.9. On dit que le champ de vecteur \vec{F} dérive d'un **potentiel** f si

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(f)$$

De manière équivalente, la forme différentielle $\omega = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ associée est exacte, et admet f pour primitive. Attention, en physique, c'est souvent $-f$ qu'on appelle le potentiel, plutôt que f .

7.4 Illustration avec le principe fondamental de la dynamique

On considère un objet ponctuel, de masse m , en mouvement dans le plan \mathbb{R}^2 (on pourrait aussi bien prendre l'espace \mathbb{R}^3). Sa position est décrite en fonction du temps t par un arc $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, noté $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Sa vitesse au temps t est donnée par la dérivée $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, et son accélération au temps t est donnée par la dérivée seconde de l'arc γ , c'est-à-dire $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t))$.

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) relie l'accélération à la somme des forces exercées sur l'objet ponctuel :

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_i$$

Souvent, les forces \vec{F}_i sont données par des champs de vecteurs (par exemple champ gravitationnel, champ électromagnétique), et le PFD s'écrit, plus précisément :

$$m\gamma''(t) = \sum_{i=1}^k \vec{F}_i(\gamma(t))$$

L'intégrale $\int_{\gamma} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$ du champ de vecteur \vec{F}_i sur l'arc γ représente le travail fourni par la force à la particule lors de ce déplacement. Il est positif si la force aide au déplacement, et négatif si la force s'y oppose. On peut interpréter le PFD de la manière suivante. La quantité de droite, intégrée le long de l'arc γ donne

$$\sum_{i=1}^k \int_{\gamma} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

le travail total fourni par les forces exercées sur la particule. De l'autre côté, par une interprétation naturelle des notations, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} m\gamma''(t) \cdot d\vec{r} &= m \int_0^T (x''(t)x'(t) + y''(t)y'(t))dt \\ &= m \left[\frac{(x'(t))^2}{2} + \frac{(y'(t))^2}{2} \right]_0^T \\ &= m \frac{v(T)^2}{2} - m \frac{v(0)^2}{2} \end{aligned}$$

C'est la différence d'énergie cinétique entre le temps final et le temps initial.

7.5 Exemple du champ gravitationnel

Le champ gravitationnel exercé par une masse M située en $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 sur une particule ponctuelle de masse m est donnée par le champ de force

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-GMmx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{-GMmy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

La forme différentielle associée associée est

$$\omega_{(x,y)} = \frac{-GMm}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x \, dx + y \, dy)$$

On peut remarquer ici que c'est une forme exacte, et de manière équivalente, que le champ gravitationnel dérive d'un potentiel. En effet, en notant

$$f(x, y) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

on a $\vec{F} = \vec{\nabla}(f)$.

On en déduit que le travail total effectué par la gravitation ne dépend pas du chemin parcouru, mais seulement du point de départ et du point d'arrivée, et même seulement de la valeur de f au point de départ et au point d'arrivée. Comme les lignes de niveau de f sont les cercles centrés en $(0, 0)$, on en déduit que le travail est nul si les points de départ et d'arrivée sont situés à la même distance de $(0, 0)$ (c'est utile pour les satellites).

Exemple 7.10. Quel est le travail fourni par la gravitation terrestre lors de la chute d'une petite pomme sur quelques mètres à la surface de la terre? Notons R le rayon de la terre et h la hauteur de la chute, tous les deux exprimés en mètres. On n'a pas besoin de plus de précisions pour calculer le travail car le potentiel de gravitation f est constant à une altitude fixée. Le travail est donc donné par

$$\begin{aligned} f(R, 0) - f(R + h, 0) &= \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R + h} \\ &= \frac{GMm(R + h - R)}{R(R + h)} \\ &= \frac{GMmh}{R(R + h)} \end{aligned}$$

Dans le cas d'une chute de quelques mètres, h est très petit par rapport à R , donc on peut même écrire

$$f(R, 0) - f(R + h, 0) \simeq \frac{GM}{R^2}mh$$

Numériquement, on a $G = 6.67 \times 10^{-11}$, $M = 5.97 \times 10^{24}$ kilogrammes, $R = 6,37 \cdot 10^6$ mètres, donc si la petite pomme pèse 100 grammes et chute de un mètre, on a un travail de

$$\frac{6.67 \times 5.97 \times 0.1 \times 1 \times 10^{24-11}}{6.37 \times 6.37 \times 10^{2 \times 6}} = 0.98$$

en Joules.

8 Complément hors programme : le Théorème de Green

Nous énonçons rapidement pour conclure une formule qui relie l'intégrale d'une forme différentielle sur un lacet régulier par morceaux avec l'intégrale **double** d'une fonction sur le domaine délimité par le lacet.

Théorème 8.1 (Théorème de Green). *Soit \mathcal{C} un lacet **simple**, régulier par morceaux dans \mathbb{R}^2 , orienté dans le sens trigonométrique. Notons D la partie du plan contenue à l'intérieur du lacet. Soit ω une forme différentielle définie sur un domaine U contenant D , dont les fonctions composantes sont notées a et b et sont de classe C^1 . Alors*

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

Nous n'expliquerons pas comment définir et calculer l'intégrale de droite en général. Dans le cas où D est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, on peut procéder en deux étapes pour calculer l'intégrale double : d'abord intégrer par rapport à x en considérant y comme une constante, puis intégrer le résultat par rapport à y . De même, nous ne précisons pas ce que signifie exactement la partie du plan contenue à l'intérieur du lacet. Notons simplement que l'hypothèse qu'un lacet soit *simple* signifie essentiellement qu'il ne se recoupe pas.

Exemple 8.2. Considérons le carré D de sommets $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ et $D = (-1, 1)$. On note \mathcal{C} son bord, parcouru dans le sens trigonométrique, et on considère la forme différentielle

$$\omega_{(x,y)} = (x + y) \, dx + xy \, dy$$

Notons $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, -1)$ une paramétrisation du segment \overline{AB} ,
 $\gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1, t)$ une paramétrisation du segment \overline{BC} ,
 $\gamma_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (-t, 1)$ une paramétrisation du segment \overline{CD} ,
et $\gamma_4 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (-1, -t)$ une paramétrisation du segment \overline{DA} .

On a alors, par la méthode habituelle,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega \\ &= \int_{-1}^1 (t - 1) dt + \int_{-1}^1 t dt + \int_{-1}^1 -(-t + 1) dt + \int_{-1}^1 -t dt \\ &= [t^2 - 2t]_{-1}^1 = -4 \end{aligned}$$

D'un autre côté, on peut aussi calculer directement l'intégrale double par la méthode décrite plus haut. D'abord, on calcule

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = y - 1$$

puis l'intégrale double :

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_{y=-1}^1 \left(\int_{x=-1}^1 (y - 1) dx \right) dy \\ &= \int_{y=-1}^1 (2y - 2) dy \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dans cet exemple particulier, on pouvait calculer sans difficultés les deux quantités. En général, on utilise le théorème lorsque l'un ou l'autre des calculs est beaucoup plus difficile que l'autre, ou qu'on connaît déjà l'un des deux côtés.

Il est très important de remarquer que la quantité qu'on intègre à droite n'est pas du tout inconnue : il s'agit de la fonction qui doit s'annuler pour que la forme différentielle ω soit fermée. On trouve alors en particulier que l'intégrale d'une forme fermée sur un lacet du type de l'énoncé est nulle. C'est tout à fait cohérent avec le lemme de Poincaré, même si on ne peut être complètement précis ici : il se trouve que la partie D du plan contenue à l'intérieur du lacet simple \mathcal{C} est "sans trous".

Par définition, l'aire de D est l'intégrale double de la fonction constante égale à 1 sur D . Cette remarque et le Théorème de Green permettent d'utiliser l'intégrale d'une forme différentielle pour calculer une aire. En effet, si on considère la forme différentielle $\omega_{(x,y)} = x \, d\mathbf{y}$, on obtient

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \iint_D 1 \, dx \, dy$$

qui est égal à l'aire de D .

Exemple 8.3. Lors d'une transformation thermodynamique, le travail des forces de pressions est donné par

$$\omega_{(V,P)} = -P \, d\mathbf{V}$$

Lors d'un cycle thermodynamique \mathcal{C} effectué dans le sens trigonométrique dans un diagramme de Clapeyron, on a donc par le Théorème de Green un travail total des forces de pression donné par

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \iint_D 1 \, dV \, dP$$

c'est-à-dire par l'aire de la partie D délimitée par le cycle. Si le cycle est parcouru dans le sens inverse, le travail est égal à l'opposé de l'aire.