Variétés toriques : Une introduction

quasi-projective : trop restrictif, car dans ce cas complet => projectif.

Quel tore ? $T = (\mathbb{C}^*)^d$

schéma de type fini réduit sur $\mathbb{C}$.

Définition : Une variété torique X est une variété algébrique ~~quasi-projective~~, irréductible et normale sur laquelle T agit effectivement avec une orbite ouverte (donc dense).

Exemples $(\mathbb{C}^*)^d \subset \mathbb{C}^d \subset \mathbb{P}^d$;

A toute variété torique, on associe un objet combinatoire (éventail) qui encode toute la géométrie de X.

Cette objet combinatoire est construite à partir de réseaux associés à T.

Le réseau des caractères de T : $M = \{$ morphisme gpe alg. : $T \to \mathbb{C}^* \}$

M s'identifie à $\mathbb{Z}^d$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_d) \rightsquigarrow$
$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (t_1, \dots, t_d) &\longmapsto t^m := t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_d^{m_d} \end{aligned}$$

Remarque : les éléments de M sont aussi des fonctions régulières sur T et on a
$$\mathbb{C}[T] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{C} . t^m \quad ; \text{ on note } \mathbb{C}[T]_m = \mathbb{C} . t^m$$

En dualité avec M, on a N le réseau des sous-groupes à 1 paramètre :
$$N = \{ \text{morphismes gpe alg. } \mathbb{C}^* \longrightarrow T \}$$
N s'identifie à $\mathbb{Z}^d$, $n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \rightsquigarrow$
$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow T \\ \lambda &\longmapsto (\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}, \dots, \lambda^{n_d}) \end{aligned}$$

La dualité entre M et N. Elle provient de la composition. $(m,n)\in M\times N$

$$m\circ n : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$\lambda \longmapsto \lambda^{\langle m,n\rangle} \quad \text{avec } \langle m,n\rangle \in \mathbb{Z}$$

La combinatoire d'une variété torique affine.

Des exemples $X = \mathbb{C}^d$; $(\mathbb{C}^*)^d$; $\mathbb{C}^r\times(\mathbb{C}^*)^{d-r}$; $\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \mid y^2 = xz\}$

L'action de $(\mathbb{C}^*)^2$ sur cette dernière est donnée par $(t_1,t_2).(x,y,z) = (t_1^2 t_2^{-1} x,\ t_1 t_2^{-1} y,\ t_2^{-1} z)$

X une variété torique affine ; comme T a une orbite ouverte, la restriction des fonctions régulières donne une inclusion

$$\mathbb{C}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}[T] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{C}[T]_m \qquad \mathbb{C}[T]_m = \mathbb{C}\, t^m$$

Cette multigraduation sur $\mathbb{C}[T]$ se restreint à $\mathbb{C}[X]$ et on a :

$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{C}[X]_m$. On définit l'ensemble suivant.

$$S = \{ m \in M \mid \dim \mathbb{C}[X]_m = 1 \}$$

<u>Propriété</u> (i) S est un sous-monoïde de M (stable par addition)

(ii) S est de type fini (engendré par un nb fini d'éléments)

(iii) S est saturé $(\exists (r, m) \in \mathbb{N}^* \times M \quad r.m \in S \Rightarrow m \in S)$

preuve (i) $\overset{\neq 0}{f} \in \mathbb{C}[X]_m$ $\overset{\neq 0}{g} \in \mathbb{C}[X]_{m'}$ $\overset{\neq 0}{fg} \in \mathbb{C}[X]_{m+m'}$

(ii) $\mathbb{C}[X]$ type fini comme algèbre

(iii) X normale $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{C}[X]$ intégralement clos dans $\mathbb{C}(X)$

$t^m \in \mathbb{C}(T) = \mathbb{C}(X)$ et cet élément est racine du polynôme :

$$Y^r - t^{rm} \in \mathbb{C}[X][Y] \quad (t^{rm} \in \mathbb{C}[X])$$

Définition On note $\sigma_X^\vee \subset M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{Z}$ le cône convexe engendré par S. $\sigma_X^\vee = \{ \sum_i \lambda_i m_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, m_i \in S \}$

et $\sigma_X = [\sigma_X^\vee]^\vee$ son dual $\sigma_X = \{ n \in N_{\mathbb{R}} \mid \forall m \in \sigma_X^\vee \ \langle m, n \rangle \geq 0 \}$

Propriété (i) $S = \sigma_X^\vee \cap M$ (S est saturé)

(ii) σ_X est fortement convexe (il ne contient pas de droite), c'est équivalent au fait que $\sigma_X^\vee$ engendre $M_{\mathbb{R}}$ comme espace vectoriel

On a une correspondance bijective

$$\{\text{variété torique affine}\} \longrightarrow \{\text{Cône fortement convexe polyédral rationnel}\}$$

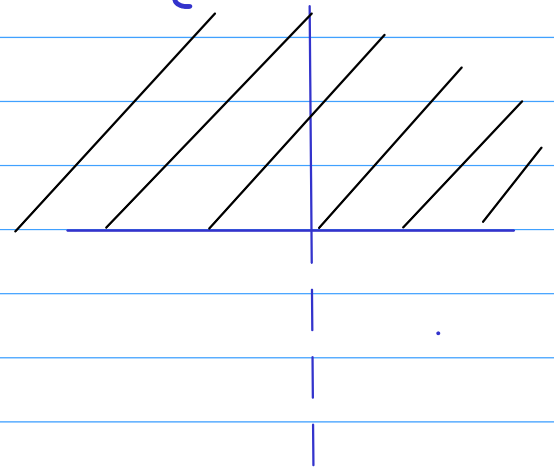
$$X \longmapsto \sigma_X$$

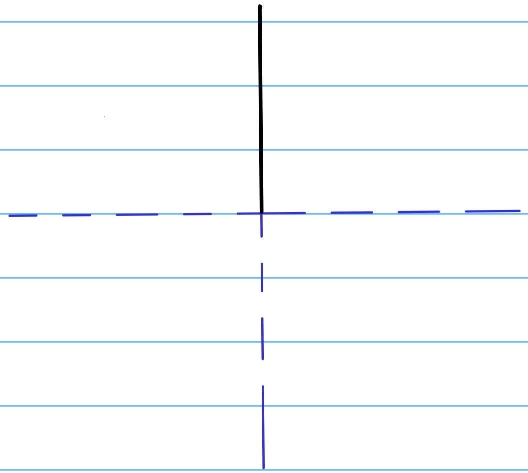
$$X_\sigma \longleftarrow \sigma$$

Les exemples $X = (\mathbb{C}^*)^d$ $\sigma^\vee = M_{\mathbb{R}}$ $\sigma = \{0\}$

$X = \mathbb{C}^d$ $\sigma^\vee = \{(t_1, \dots, t_d)\ t_i \geq 0\}$ $\sigma = \{(d_1, \dots, d_d) \mid d_i \geq 0\}$

$X = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$





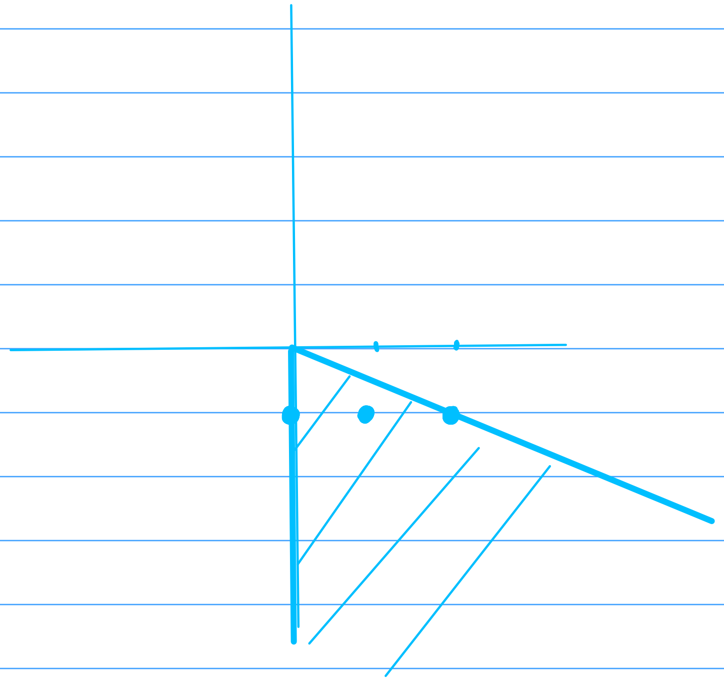
M

N

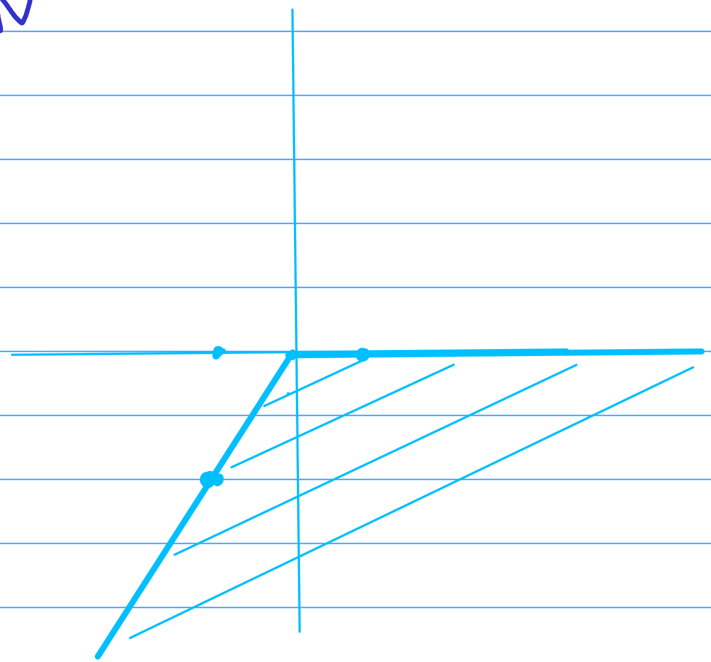
$$X = \{ (x,y,z) \mid xz - y^2 = 0 \}$$

$$(t_1,t_2)(x,y,z) = (t_1^2 t_2^{-1} x,\ t_1 t_2^{-1} y,\ t_2^{-1} z)$$

M



N



Dans cette correspondance si τ est une face de σ, alors on a une inclusion

$\mathbb{C}[X_\sigma] \subset \mathbb{C}[X_\tau]$ En fait, plus précisement X_τ est un ouvert principal de X_σ

Pour cela on écrit $\tau = \sigma \cap H_m$

avec $H_m = \{ n \in N \ \langle m, n \rangle = 0 \}$ avec $m \in \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$

$$S_\tau = \tau^\vee \cap M = S_\sigma - \mathbb{N} m$$ c'est à dire $$\mathbb{C}[X_\tau] = \mathbb{C}[X_\sigma]_{t^m}$$

$$X_\tau = X_\sigma \setminus \{ t^m = 0 \} \qquad X_\tau \subset X_\sigma$$

Variétés toriques générales

Objet combinatoire : éventail

<u>Définition</u> Un éventail est un ensemble fini Σ de cônes fortement convexes polyédraux (de N) tel que si τ est une face de $\sigma \in \Sigma$, alors $\tau \in \Sigma$ et si $\sigma, \tau \in \Sigma$. $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et τ

A un éventail Σ, on fait correspondre une variété algébrique construite par "recollement". $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma / \sim$

La relation $\sim$ $\quad \sigma, \sigma' \in \Sigma$

$$\begin{tikzcd} & X_\sigma \\ X_{\sigma\cap\sigma'} \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "i'"'] & \\ & X_{\sigma'} \end{tikzcd}$$

immersion ouverte

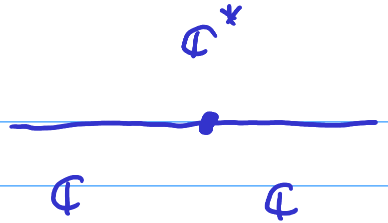
on identifie les points $i(x)$ et $i(x')$.

Théorème La variété ainsi obtenue est une variété torique.

$\{0\} \subset \sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma \qquad T \subset X_\sigma \qquad T$ dense

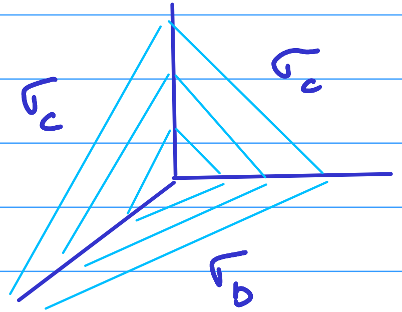
Exemples : σ cone $\quad \Sigma = \{$ faces de $\sigma\} \rightsquigarrow X_\sigma$

2) $d = 1$

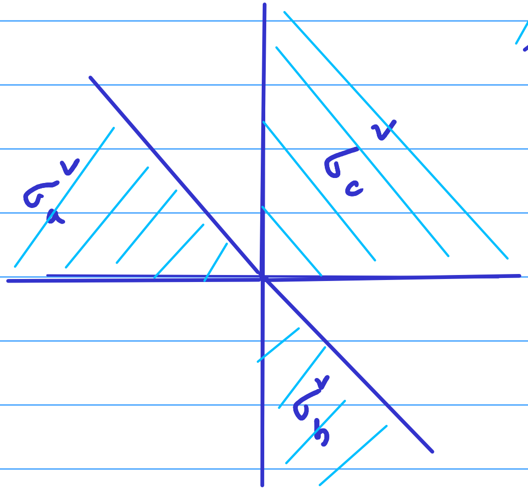


$\rightsquigarrow \mathbb{P}^1$

3) $d = 2$



$$\mathbb{P}^2 = \{ [a : b : c] \ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \}$$



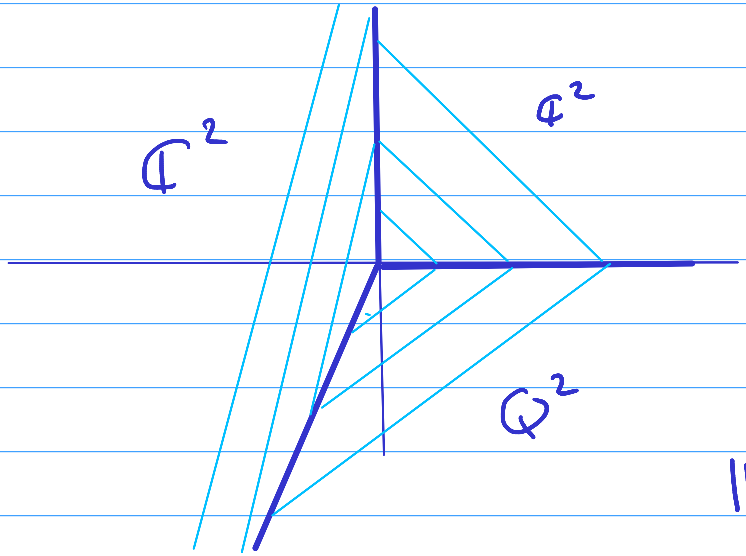
$$a \neq 0 \quad U_a = \left\{ \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right) \right\} \simeq \mathbb{C}^2$$

$$(t_1, t_2) \cdot (a,b,c) = (t_1 a, t_2 b, c)$$

$$U_b = \left\{ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b} \right) \right\} \quad U_c = \left\{ \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right) \right\}$$

Dernier exemple $\Sigma = \{ \langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_2, e_0 \rangle, \langle e_1, e_0 \rangle \}$ $e_0 = -e_1 - 2e_2$

éventail



$\mathbb{P}(1,1,2)$ Espace projectif à poids (singulier)

Propriétés (dictionnaire)

(1) $\forall \sigma \in \Sigma$ σ est engendré par une base de N $\Leftrightarrow$ X_Σ est lisse

(2) Si $N = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ $\Leftrightarrow$ N est complète (compacte)

[(3) Si Σ est engendré par un polytope P contenant 0, alors Σ est projective.]

Les orbites de T dans X_Σ

Pour tout $\sigma \in \Sigma$ X_σ contient une unique orbite fermée. Notons cette orbite O_σ

<u>Propriété</u>

[(i) O_σ s'identifie avec $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C})$]

(ii) $\dim O_\sigma = \operatorname{codim}_{N_{\mathbb{R}}}(\sigma)$

(iii) $X_\sigma = \bigcup_{\tau \subset \sigma} O_\tau$

(iv) $\tau \subset \sigma \iff O_\sigma \subset \overline{O_\tau}$ $\qquad \overline{O_\tau} = \bigcup_{\tau \subset \sigma} O_\sigma$

Diviseur de Weyl (T-invariants)

Soit $\rho \in \Sigma(1)$ cône de dimension 1 de Σ

Alors $\overset{D_\rho}{\overset{\shortparallel}{\overline{O_\rho}}} = \bigcup_{\sigma \supset \rho} O_\sigma$ est une sous-variété de codimension 1 T-stable irréductible

c'est un diviseur premier

On définit le groupe des diviseurs T-stable : $Div_T(X)$

<u>Théorème</u> $Div_T(X) = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot D_\rho$