

Fonctorialité: LCK

$$\begin{array}{ccc} Y_K \subset V \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{P_K} & V \\ \downarrow P_K & & \parallel \\ Y_L \subset V \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{P_L} & V \end{array}$$

Réduction: M un sev minimal de K

$K' = K - \{M\}$ famille de sev de V^*

$$K = \left\{ \frac{A \cap M}{M}, A \in K, A \neq M \right\} \xrightarrow{V^*/M = (M^\perp)^\perp}$$

$$\begin{array}{ccc} Y_K & \xrightarrow{P} & V \\ \downarrow & & \parallel \\ Y_{K'} & \xrightarrow{P'} & V \end{array}$$

$A \in K - M$

$$P_A = P(M^\perp / M^\perp \cap A^\perp) \hookrightarrow P_A = P(V/A^\perp)$$

$$\begin{cases} Y_K \hookrightarrow Y_{K'} \\ Y_K \subset (P_{K'})^{-1}(M^\perp) \end{cases}$$

Point clé pour construire par réc. sur nbre d'éléments de K
(car K' et K ont moins d'éléments)

Éclatement = Construire de nouvelles variétés en conservant des informations sur

l'anneau de cohomologie
↳ Il faut éclater qdques de codim ≥ 2 pour q'il se passe qqchose

Exple: W sev de V $K = \{W^\perp\}$

$$j: V - W \rightarrow V \times \mathbb{P}(V/W)$$

$$v \mapsto (v, [\alpha \bar{v}])$$

Def: $E_w(V) = \text{image de } j$
 $= \{ (v, d) \in V \times \mathbb{P}(V/w) \mid \pi(v) \in d \}$
 où $\pi: V \rightarrow V/w$

$$p: E_w(V) \rightarrow V$$

$$p^{-1}(V-w) \simeq V-w$$

$$p^{-1}(w/w \simeq \mathbb{P}(V/w)) \rightarrow \text{diviseur de } E_w(V)$$

Par def, c'est l'éclatement de V le long de w

Rq: si $w = \{0\}$ \rightarrow fibre canonique
 $E_w(V) = \mathcal{O}(-1)$ au-dessus de $\mathbb{P}(V)$

Def: X variété algébrique lisse

Propriété Z \mathbb{A}^1 -variété lisse

Il existe une variété lisse $E_Z(X)$ et $p: E_Z(X) \rightarrow X$

$$\text{tg } p^{-1}(x-z) \simeq X-z$$

$$p^{-1}(z) \simeq \text{sous-variété de codim } 1$$

$E_Z(X)$ est l'objet "final" satisfaisant les deux conditions

Cas particulier: X est affine, $I_Z = \{ f \in \mathbb{C}[X], f|_Z = 0 \}$
 $= \langle f_0, \dots, f_n \rangle$

$$j: X-z \rightarrow X \times \mathbb{P}^n$$

$$x \mapsto (x, [f_0(x), \dots, f_n(x)])$$

$$E_Z(X) = \overline{\text{Image}(j)}$$

Localement, l'éclatement est de la forme

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \xrightarrow{P} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$$

$$(t, z, w) \mapsto (t, tz, w)$$

$$D_z = \{(0, z, w)\}$$

$$Z = \{(0, 0, w)\}$$

↑
toujours de codim 1

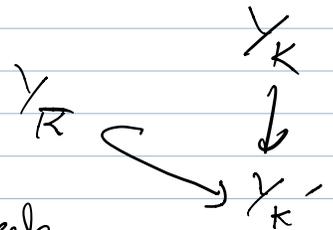
On revient aux " Y_K "

On suppose que K est stable par +

Prop: Y_K est lisse

A minimal dans K : $\left\{ \begin{array}{l} K' = K - \{A\} \\ \mathbb{R} \end{array} \right\}$ \leftarrow stables par addition

Prop: $Y_K = E_{Y_{\bar{K}}} (Y_{K'})$



Il faut des modèles locaux pour démontrer cela

Sans-cas: \mathbb{F} est un drapeau de ser de V^n

$$\mathbb{F} = \{0\} \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_p \subset V^n$$

Prop: $Y_{\mathbb{F}}$ est lisse

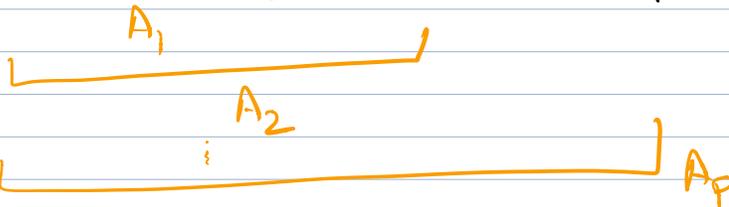
$Y_{\mathbb{F}} = E_{Y_{\mathbb{F}}} (Y_{\mathbb{F}'})$

\leftarrow éclatement de $Y_{\mathbb{F}}$, le long de $Y_{\mathbb{F}'}$

Éléments de preuve:

base adaptée de V^n : coordonnées marquées

$$e_1^{\uparrow}, \dots, e_{n_1}^{\uparrow}, \dots, e_{n_2}^{\uparrow}, \dots, e_{n_p}^{\uparrow}, \dots, e_n^{\uparrow}$$



$$\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$x \mapsto X$$

$$X_i = z_i \prod_{i < m_l} z_{m_l} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{coordonnées} \\ \text{homogènes} \end{matrix}$$

C'est birationnel car si l'on veut l'inverse,

$$\mathbb{C}^m \xrightarrow{\substack{\text{b} \\ \text{f}}} \mathbb{C}^m \rightarrow V \xrightarrow{\text{L}_K} V \times \prod_{i=1}^m \mathbb{P}^{m_i} \xrightarrow{\text{P}} \mathbb{P}^{m_i}$$

$$z \mapsto X \rightarrow \sum X_i e_i \quad \leftarrow \begin{matrix} m_{i-1} < l < m_i \end{matrix}$$

$$z \mapsto X \rightarrow \sum X_i e_i$$

$$v \mapsto \ell_{\mathbb{P}}(v)$$

defini une application ouverte

Prop:

$\substack{\text{b} \\ \text{f}}$ immersion

$$\mathbb{C}^m \xrightarrow[\substack{\text{b} \\ \text{f}}]{\sim} Y_{\mathbb{F}} \cap (V \times \prod_{i=1}^m \mathbb{P}^{m_i})$$

$$\mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{P}_{A_i} = \mathbb{P}(V/A_i)$$

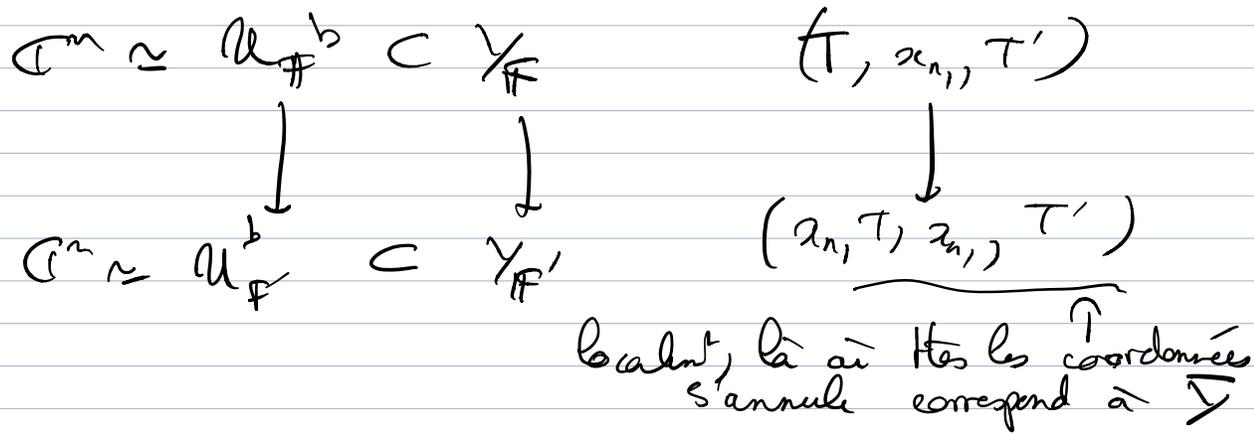
$$x \mapsto [x_1 z_{m_1} \dots z_{m_2}, x_2 z_{m_2} \dots z_{m_2}, \dots, x_{m_1} \dots z_{m_2}]$$

↑ facteur: on peut le simplifier

$$Y_{\mathbb{F}} = \cup_b U_{\mathbb{F}}^b$$

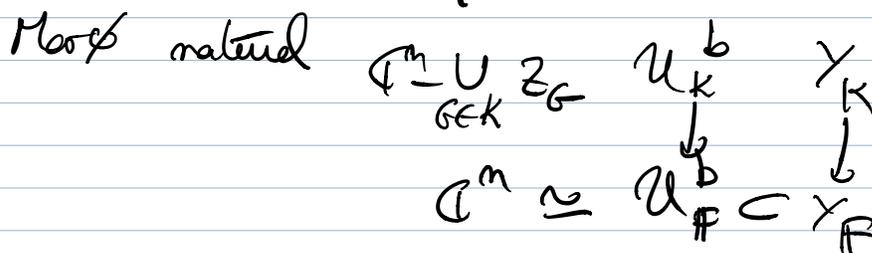
$$Y_{\mathbb{F}} \rightarrow Y_{\mathbb{F}'}$$

But $H_{\mathbb{F}} =$ idéal entier birationnel de $Y_{\mathbb{F}}$



Ds article, utilise $\mathcal{Y}_{\mathbb{F}} = \bigcup_b \mathcal{U}_{\mathbb{F}}^b$
 pour étudier le cas général.

Ds le cas général, $\left\{ \begin{array}{l} K \text{ stable par } + \\ \mathbb{F} \subset K \text{ maximal} \end{array} \right.$



Par le m type de construction, on va trouver \mathcal{U}_K^b au-dessus de $\mathcal{U}_{\mathbb{F}}^b$

FIN

Nested set = drapeaux

qd building set = /s-ensemble stable par +