Exposé de Paul Emile n°3 13/10/20

Compactifications magnifiques ①

$K =$ famille de sev non nuls de V^* — sev de dim finie

$$\mathcal{U}(K) = V - \bigcup_{A \in K} A^\perp$$

complémentaire de l'arrangement d'hyperplans

$$V - \bigcup_{A \in K} A^\perp \longrightarrow \mathbb{P}_A = \mathbb{P}(V/A^\perp)$$

$$v \longmapsto [\mathbb{C} v]_A$$

$$e_K : \mathcal{U}(K) \longrightarrow V \times \prod_{A \in K} \mathbb{P}_A$$

$$v \longmapsto (v, ([\mathbb{C} v]_A))$$

Déf : $\boxed{Y_K = \text{adhérence de l'image de } e_K}$

Exemple : $H_1, \dots, H_N$ dans V, famille d'hyperplans

$d_i := H_i^\perp$ droites de V^*

$K_{max} = \{$sev engendré par les $d_i\}$ ← ensemble des plats

$K_{min} = \{d_1, \dots, d_N\}$

$$\mathcal{U}(K_{min}) = \mathcal{U}(K_{max})$$

$p_K : Y_K \to V$ propre, birationnel

$$Y_K^\circ = p_K^{-1}(\mathcal{U}(K)) \simeq \mathcal{U}(K)$$

$$Y_K = Y_K^\circ \amalg D_K \quad \text{où } D_K = p_K^{-1}\Big(\bigcup_{A \in K} A^\perp\Big)$$

<u>Fonctorialité</u> : $\mathcal{L} \subset K$

$$\begin{array}{ccc} Y_K \subset V \times \prod_{A \in K} \mathbb{P}_A & \xrightarrow{p_K} & V \\ {\scriptstyle p^K_{\mathcal{L}}} \downarrow & & \| \\ Y_{\mathcal{L}} \subset V \times \prod_{A \in \mathcal{L}} \mathbb{P}_A & \xrightarrow{p_{\mathcal{L}}} & V \end{array}$$

Réduction : M un sev minimal de K

$K' = K - \{M\}$ famille de sev de V^*

$\bar{K} = \{ \underbrace{A+M/M}_{\bar{A}}, A \in K, A \neq M \}$ —— $V^*/M \simeq (M^\perp)^*$

$$\begin{array}{ccc} Y_K & \xrightarrow{p} & V \\ \downarrow & & \| \\ Y_{K'} & \xrightarrow[p']{} & V \end{array}$$

$A \in K - M$

$\mathbb{P}_{\bar{A}} = \mathbb{P}(M^\perp / M^\perp \cap A^\perp) \hookrightarrow \mathbb{P}_A = \mathbb{P}(V/A^\perp)$

$$\begin{cases} Y_{\bar{K}} \hookrightarrow Y_{K'} \\ Y_{\bar{K}} \subset (p_{K'})^{-1}(M^\perp) \end{cases}$$

Point clé pour construire par réc. sur nbre d'éléments de K

(car K' et $\bar{K}$ ont moins d'éléments)

Éclatement : Construire de nouvelles variétés en conservant des informations sur l'anneau de cohomologie

↳ Il faut éclater qqchose de codim ≥ 2 pour qu'il se passe qqchose

Exple : W sev de V $\quad K = \{W^\perp\}$

$j : V - W \longrightarrow V \times \mathbb{P}(V/W)$

$v \longmapsto (v, [\mathbb{C}\bar{v}])$

Déf : $E_W(V) =$ image de j

$$= \{(v,d) \in V \times \mathbb{P}(V/W) \text{ tq } \pi(v) \in d\}$$

où $\pi : V \to V/W$

$p : E_W(V) \to V$

$p^{-1}(V - W) \simeq V - W$

$p^{-1}(W) \simeq W \times \mathbb{P}(V/W) \to$ diviseur de $E_W(V)$

Par déf, c'est l'éclatement de V le long de W

Rque si $W = \{0\}$

$E_W(V) = \mathcal{O}(-1)$ au-dessus de $\mathbb{P}(V)$ fibré canonique

Déf : X variété algébrique lisse

Propositⁿ Z ss-variété lisse

Il existe une variété lisse $E_Z(X)$ et $p : E_Z(X) \to X$

tq $\begin{cases} p^{-1}(X - Z) \simeq X - Z \\ p^{-1}(Z) \simeq \text{sous-variété de codim } 1 \end{cases}$

$E_Z(X)$ est l'objet "final" satisfaisant les deux conditions

Cas particulier : X est affine, $I_Z = \{f \in \mathbb{C}[X], f|_Z = 0\}$

$$= \langle f_0, \dots, f_N \rangle$$

$$j : X - Z \to X \times \mathbb{P}_N$$

$$x \mapsto (x, [f_0(x), \dots, f_N(x)])$$

$$E_Z(X) = \overline{\text{Image}(j)}$$

Localement, l'éclatement est de la forme

$$\mathbb{C}\times\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q \xrightarrow{p} \mathbb{C}\times\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q$$
$$(t,z,w) \longmapsto (t, tz, w)$$

$D_Z = \{(0,z,w)\}$ $\qquad\qquad Z = \{(0,0,w)\}$

toujours de codim 1

On revient aux "Y_K"

On suppose que K est stable par $+$

Prop : Y_K est lisse

A minimal dans K : $\begin{cases} K' = K - \{A\} \\ \bar{K} \end{cases}$ stables par addition

Prop : $\boxed{Y_K = E_{Y_{\bar{K}}}(Y_{K'})}$

$$\begin{tikzcd} & Y_K \arrow[d] \\ Y_{\bar{K}} \arrow[r, hook] & Y_{K'} \end{tikzcd}$$

Il faut des modèles locaux pour démontrer cela

Sous-cas : $\mathbb{F}$ est un drapeau de sev de V^*

$$\mathbb{F} = \{0\} \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_p \subset V^*$$

Prop : $Y_{\mathbb{F}}$ est lisse

$\boxed{Y_{\mathbb{F}} = E_{Y_{\bar{\mathbb{F}}}}(Y_{\mathbb{F}'})}$ éclatement de $Y_{\mathbb{F}'}$ le long de $Y_{\bar{\mathbb{F}}}$

Éléments de preuve : base adaptée de V^* : coordonnées marquées

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{e_1^*, \dots, e_{n_1}^*}_{A_1}, \dots, e_{n_2}^*}_{A_2}, \dots, e_{n_p}^*}_{A_p}, \dots, e_n^*$$

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad X_i = x_i \prod_{i<m_k} x_{m_k}$$
$$x \mapsto X$$

coordonnées marquées

C'est birationnel car si l'on veut l'inverse,

$$x_l = \frac{X_l}{X_{m_{i}}}, \quad m_{i-1} < l < m_i$$

$$\overset{b}{i}_{\mathbb{F}} \quad \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \to V \overset{\ell_K = \ell_F}{\dashrightarrow} V \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}_{A_i}$$

$$x \mapsto X \to \sum X_i e_i$$

$$v \longmapsto \ell_F(v)$$

définit une application ouverte

Prop: $\overset{b}{i}_{\mathbb{F}}$ immersion

$$\boxed{\mathbb{C}^n \xrightarrow[\hat{i}^b_{\mathbb{F}}]{\sim} Y_{\mathbb{F}} \cap \left(V \times \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}_{A_i}^{\circ}\right)}$$

$$\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{P}_{A_1} = \mathbb{P}(V/A_1^{\perp})$$

$$x \mapsto [x_1 x_{n_1} \dots x_{n_2}, x_2 x_{m_2} \dots x_{n_2}, \dots, x_{m_1} \dots x_{n_2}]$$

$\hat{m}$ facteur: on peut le simplifier

$$\boxed{Y_{\mathbb{F}} = \bigcup_b \mathcal{U}^b_{\mathbb{F}}}$$

$$Y_{\mathbb{F}} \longrightarrow Y_{\mathbb{F}'}$$

But Mq : éclatem^t birationnel de en $Y_{\mathbb{F}}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \simeq \mathcal{U}^b_{\mathcal{F}} \arrow[d] & \subset & Y_{\mathcal{F}} \arrow[d] \\ \mathbb{C}^n \simeq \mathcal{U}^b_{\mathcal{F}'} & \subset & Y_{\mathcal{F}'} \end{tikzcd}$$

$$(T, x_{n,}, T') \longmapsto (x_n, T, x_{n,}, \underbrace{T'}_{}\,)$$

localmt, là où ttes les coordonnées s'annule correspond à Σ

Ds article, utilise $Y_{\mathcal{F}} = \bigcup_b \mathcal{U}^b_{\mathcal{F}}$

pour étudier le cas général.

Ds le cas général, | K stable par $+$
| $\mathcal{F} \subset K$ maximal

Morφ naturel

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n - \bigcup_{G \in K} Z_G \quad \mathcal{U}^b_K \arrow[d] & Y_K \arrow[d] \\ \mathbb{C}^n \simeq \mathcal{U}^b_{\mathcal{F}} \subset & Y_{\mathcal{F}} \end{tikzcd}$$

Par le m̂ type de construcᵒ, on va trouver $\mathcal{U}^b_K$ avant au-dessus de $\mathcal{U}^b_{\mathcal{F}}$

FIN

Nested set = drapeaux

Qd building set = /s-ensemble stable par $+$