Combinatoire énumérative des matroïdes : Résultats et conjectures

Rappels : Polynôme caractéristique

M matroïde de rang n $\quad \chi_M(q) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} q^{\text{corang}(A)}$

$$= \sum_{F \text{ plat}} \mu(\hat{0}, F)\, q^{\text{corang}(F)}$$

- $\mu(a,b) = -\sum_{a \leq x < b} \mu(a,x)$ et $\mu(a,a) = 1$

- Si $f : L \to \mathbb{C}$ On pose $g(x) = \sum_{y < x} f(y)$

treillis

Alors $f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y,x)\, g(y)$

- $\chi_M(1) = 0$ donc $\chi_M(q) = \overline{\chi_M}(q)\,(q-1)$

polynôme caractéristique réduit

But :
- démontrer que les coeffs de $\overline{\chi_M}(q)$ sont non nuls et alternent en signe
- donner une interprétation de la valeur absolue de ces coefficients en termes de drapeaux de plats
- Énoncer thme d'Adiprasito-Huh-Katz et leurs conséquences

Thme de Weisner : Soit L un treillis fini, $a \neq \hat{0}$

$$\sum_{x \,|\, x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = 0$$

Démo : Posons $f = \delta_x$

On calcule $g(y) = \sum_{x \leq y} \delta_x(y) = \mathbb{1}_{\geq x}(y)$

inversion de Möbius $\leadsto$ $\delta_x(y) = \sum_{z \leq y} \mu(z,y)\, \mathbb{1}_{\geq x}(z)$

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (2)$$

$$(1) \leftarrow ???$$

$$- \sum_{x \leq z \leq y} \mu(z,y)$$

$$\sum_{x \text{ tq } x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) \underset{(1)}{=} \sum_{x \in L} \left(\mu(\hat{0}, x) \sum_{x \vee a \leq z \leq \hat{1}} \mu(z, \hat{1}) \right)$$

$$= \sum_{x \in L} \sum_{\hat{0} \leq z \leq \hat{1}} \mu(\hat{0}, z)\, \mu(z, \hat{1})\, \mathbb{1}_{\geq x}(z)$$

$$= \sum_{\hat{0} \leq z \leq \hat{1}} \mu(z, \hat{1}) \Big(\underbrace{\sum_{\hat{0} \leq x \leq z} \mu(\hat{0}, x)}_{\delta_0(z) = 0 \text{ car } z \geq x \neq \hat{0}} \Big)$$

$$= 0$$

Thme : Si L treillis géométrique fini

$$\forall x \leq y, \quad (-1)^{\underset{\underset{rg(y) - rg(x)}{\parallel}}{rg(x,y)}} \mu(x,y) > 0$$

Démo : Il suffit de le démontrer pour $x = \hat{0}$ et $y = \hat{1}$

On raisonne par récurrence sur le rang du treillis

- Si $rg(L) = 1$, $L = \{\hat{0} < \hat{1}\}$ $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = -1$
- On suppose le résultat pour les treillis de $rg < n$. On suppose L de rang n.

Si a est un atome, alors $\forall y \in L$, $rang(y \wedge a) + rg(y \vee a) \leq rg(y) + \underset{rg(a)}{\overset{\shortparallel}{1}}$

car le treillis est géométrique

Alors, si $x \vee a = \hat{1}$, $rg(x \wedge a) + n \leq rg(x) + 1$

2 cas $\to$ $x = \hat{1}$

$\to$ $rg(x) = n-1$ (x coatome) et $a \nleq x$ (impliqué par $x \vee a = \hat{1}$ et $x \neq \hat{1}$)

Thme de Weisner $\Rightarrow$ $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = - \sum_{a \nleq x < \hat{1}} \underbrace{\mu(\hat{0}, x)}_{\neq 0}$ et de signe $(-1)^{n-1}$

d'où $\mu(\hat{0},\hat{1})(-1)^n > 0$ ■

Corollaire : M matroïde de rang n

$$\chi_M(q) = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k \quad \text{Alors } (-1)^{n-k} a_k > 0$$

Démonstration

$$a_k = \sum_{\substack{F \text{ plat} \\ \operatorname{corang}(F) = k}} \mu(\hat{0}, F) \quad \text{or } (-1)^{\overset{= n-k}{\operatorname{rang}(F)}} \mu(\hat{0}, F) > 0$$

$$\Rightarrow (-1)^{n-k} a_k > 0$$ ■

Interprétation combinatoire des coefficients

On choisit un ordre total sur les atomes donné par un ordre total sur E

$E = \{0, 1, \dots, n\}$

$$a_{n-k} = \sum_{\substack{F_k \text{ plat} \\ rg(F_k) = k}} \mu(\hat{0}, F_k) = \sum_{\substack{F_k \text{ plat} \\ rg(F_k) = k}} \left(- \sum_{\substack{F_{k-1} \subset F_k \\ rg(F_{k-1}) = k-1 \\ \min(F_k) < \min(F_{k-1})}} \mu(\hat{0}, F_{k-1}) \right)$$

preuve du thm de Weisner avec le + petit atome

$$= (-1)^{k-1} \sum_{\substack{F_1 \subset \dots \subset F_k \\ \min F_1 < \dots < \min F_k \\ rg\, F_i = i}} \underbrace{\mu(\hat{0}, F_1)}_{-1}$$

$$= (-1)^k \left| \left\{ F_1 \subset \dots \subset F_k \;\middle|\; \begin{array}{c} \min F_1 < \dots < \min F_k \\ rg\, F_i = i \end{array} \right\} \right|$$

On peut supposer le matroïde simple (ne change pas le treillis)

↳ ds ce cas, E = atomes

Question Thibault :
Si atomique, donne ordre lexicographique ?

Qu'en est-il des coefficients du polynôme réduit ?

$$\overline{\chi_M}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k q^k$$

$$b_{n-1-k} = (-1)^{n-1-k} \left| \left\{ F_1 < \dots < F_k \text{ flats tq } \begin{array}{l} \mathrm{rk}(F_1) > \dots > \mathrm{rk}(F_k) > 0 \\ \mathrm{rg}(F_i) = i \end{array} \right\} \right|$$

Énoncé d'Adiprasito Huh-Katz   Log-concavité

$$\chi_M(q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k w_k q^{n-k}, \quad w_k > 0$$

$$\overline{\chi_M}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k m_k q^{n-1-k}, \quad m_k > 0$$

Thme [AHK] La suite $(m_k)_{k \geq 0}$ est log-concave.

Corollaire : La suite $(w_k)_{k \geq 0}$ est log-concave

↑ Conjecture de Heron-Rota-Welsh

Démo : $\chi_M(q) = \overline{\chi_M}(q)(q-1)$ donc $w_k = m_k + m_{k-1}$

On sait que $m_k^2 \geq m_{k+1} m_{k-1}$ $\forall k$

$$w_k^2 = (m_k + m_{k-1})^2 = m_k^2 + m_{k-1}^2 + 2 m_k m_{k-1}$$

$$w_{k+1} w_{k-1} = (m_{k+1} + m_k)(m_k + m_{k-1}) = m_k^2 + m_{k-1} m_k + m_{k+1} m_{k-1} + m_k m_{k-1}$$

log-concavité ⇒ unimodalité

en particulier $\dfrac{m_{k+1}}{m_k} \leq \dfrac{m_{k-1}}{m_{k-2}}$ d'où $m_{k+1} m_{k-2} \leq m_k m_{k-1}$

$$w_k^2 \geq m_{k+1} m_{k-1} + m_k m_{k-2} + 2 m_k m_{k-1}$$

$$\geq \underbrace{(m_{k+1} + m_k)}_{w_{k+1}} \underbrace{(m_{k-1} + m_{k-2})}_{w_{k-1}}$$

Corollaire [Conjecture de Welsh–Mason] Notons f_k le nbre d'indépendants de M de rang k. Alors $(f_k)_{k=0,\dots,n}$ est log-concave.

Stratégie de preuve: Exhiber M' un matroïde de rg $n+1$ tq

$$(-1)^{n+1}\overline{\chi}_{M'}(-q) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, q^{n-k}$$

Construction de M'

$(M^* + e)^*$

corang dans M'

$$\chi_{M'}(-q) = \sum_{A\subseteq E\cup\{e\}} (-1)^{|A|}(-q)^{\mathrm{corang}(A)}$$

$|A'|+1$ où $A' = A\setminus\{e\}$

$$= \sum_{A\subseteq E} (-1)^{|A|}(-q)^{\mathrm{corang}'(A)} + \sum_{\{e\}\subseteq A\subseteq E\cup\{e\}} (-1)^{|A|}(-q)^{\mathrm{corang}'(A)}$$

Il ne reste que les $A\subseteq E$ tq $\mathrm{corang}'(A\setminus\{e\}) = \mathrm{corang}'(A)+1$

Probablement vrai $\{A\subseteq E \mid rg'(A\setminus\{e\}) = rg'(A)+1\}$ = indépendants de M

$$m_k = \pm\left|\left\{F_1\subset\dots\subset F_k \;\middle|\; \begin{array}{l} rg(F_i)=i \text{ ds } M' \\ \min(F_1)>\dots>\min(F_k)>0 \end{array}\right\}\right|$$

$= \pm|\{$indépendants de rg k ds $M\}|$

Interprétation

Ajouter e $\leftrightarrow$ ajouter un vecteur en position général

$M'/e = M$ $\Leftrightarrow$ ajouter une dim à M'

Autre conj non démontrée [Rota–Welsh]

$W_k(M) = |\{$flats de rg $k\}|$ est log-concave.

↳ Peu de choses connues, même ds cas représentable

FIN