Théorie de Hodge

= ensemble de structures sur la cohomologie des variétés kählériennes compactes (inclut les variétés algébriques complexes projectives lisses).

"Package de Hodge-Lefschetz" (Lefschetz ~ 1920, Hodge ~ 1930)

1. Décomposition de Hodge
2. Théorème de Lefschetz difficile
3. Inégalités de Hodge-Riemann

"It was my lot to plant the harpoon of algebraic topology into the body of the whale of algebraic geometry."

S. Lefschetz

"With the restoration of geometry to its rightful place in the mathematical scheme the process of fragmentation which had been doing so much harm to mathematics has been reversed, and we may look forward to <u>the day in which there are no longer analysts, algebraists, geometers and so on, but simply mathematicians</u>."

W. Hodge

<u>Applications de la théorie de Hodge</u> : polytopes, volumes mixtes, groupes de Coxeter, théorie des représentations, arithmétique, matroïdes et graphes, ...

① La décomposition de Hodge

- X = une variété complexe (coordonnées locales holomorphes $z_1, \dots, z_n$).
- Cohomologie de de Rham

$$H^\cdot(X)_{\mathbb{C}} = H^\cdot\left(0 \to A^0(X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} A^1(X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^{2n}(X)_{\mathbb{C}} \to 0\right).$$

$$\left(V \text{ un } \mathbb{R}\text{-ev} \rightsquigarrow V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \oplus iV\right)$$

- Décomposition des formes :

$$A^k(X)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X)$$

formes de type (p,q)

$$\sum f \, dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

$(f : X \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty)$

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{avec } \partial : A^{p,q} \to A^{p+1,q}, \quad \bar{\partial} : A^{p,q} \to A^{p,q+1}.$$

ex : pour $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^\infty$, $df = \partial f + \bar{\partial} f$

$$\underbrace{\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i}_{\in A^{1,0}(X)}, \quad \underbrace{\bar{\partial} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i}_{\in A^{0,1}(X)}$$

Théorème : (Décomposition de Hodge)

Soit X une variété kählérienne compacte.

Pour $p+q=k$, soit $H^{p,q}(X) = \{$ classes dans $H^k(X)_{\mathbb{C}}$ de formes fermées de type $(p,q)\}$

On a : $H^k(X)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \qquad (\forall k = 0, \dots, 2n)$.

Remarque : Comme $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$, implique que $\dim H^k(X)$ est pair si k est impair.

Définition : Une variété complexe X est kählérienne s'il existe une métrique hermitienne h sur X telle que $\omega = -\mathrm{Im}(h)$ soit une 2-forme fermée $(d\omega = 0)$.

nécessairement de type $(1,1)$

Exemple : $X = \mathbb{C}^n$, $h(z,z') = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z'_k}$, $\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\overline{z}_k$

Lemme : X est kählérienne $\Longleftrightarrow$ il existe une métrique hermitienne h sur X dont la matrice est partout $I_n + O(\|z\|^2)$.

Autres exemples :

. $X = \mathbb{C}^n / \Lambda \overset{\text{difféomorphe}}{\simeq} (S^1)^{2n}$

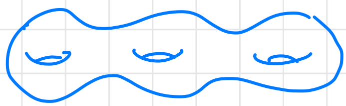
Λ : réseau

$$H^1(X)_{\mathbb{C}} = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$$

$$H^{1,0}(X) = \mathbb{C}dz_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}dz_n \,, \quad H^{0,1}(X) = \mathbb{C}d\bar{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}d\bar{z}_n$$

. X surface de Riemann ($\dim X = 1$) compacte, g quelconque.

$$H^1(X)_{\mathbb{C}} = \underbrace{H^{1,0}(X)}_{\text{dim. } g} \oplus \underbrace{H^{0,1}(X)}_{\text{dim. } g}$$

$X =$ 

$$H^{1,0}(X) = H^0(X, \Omega^1_X) = \{1\text{-formes holomorphes sur } X\} \quad \text{de dim. } g.$$

. $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\omega = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log\left(1 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)$.

$$H^{2k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))_{\mathbb{C}} = H^{k,k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[\omega^k] \quad (\forall k = 0, \dots, n).$$

ω normalisée pour que $[\omega] \in H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$: $\displaystyle\iint_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} = 1$

en fait $[\omega]$ = classe d'un hyperplan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

. X = variété algébrique complexe projective lisse $(X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$.

(ex : compactification magnifiques $Y_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \prod_i \mathbb{P}^{n_i}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$)

<u>Remarque</u> : $Z \hookrightarrow X$ sous-variété de codim $k \rightsquigarrow [Z] \in H^{k,k}(X) \subset H^{2k}(X)_{\mathbb{C}}$.

Preuve de la décomposition de Hodge :

- Métrique riemannienne $g = \mathrm{Re}(h) \rightsquigarrow$ produit scalaire sur $A^k(X)$

  $(\alpha, \beta) = \int_X g(\alpha_x, \beta_x)\, \mathrm{vol}_g(x)$ (on utilise la compacité de X)

- Adjoint de d : $d^* : A^k(X) \longrightarrow A^{k-1}(X)$ $(\partial^*, \bar{\partial}^*)$

  $(\alpha, d^*\beta) = (d\alpha, \beta)$

  $\rightsquigarrow$ Opérateur laplacien $\Delta_d = dd^* + d^*d \circlearrowright A^k(X)$ $(\Delta_\partial, \Delta_{\bar\partial})$

  Formes harmoniques $\mathcal{H}^k(X) = \ker(\Delta_d) = \ker(d) \cap \ker(d^*)$.

  (formes fermées de norme minimale dans leur classe de cohomologie)

- "Théorème de Hodge" : $\mathcal{H}^k(X) \xrightarrow{\sim} H^k(X)$ (analyse)

- X kählérienne $\rightsquigarrow$ "identités kählériennes"

  ex : $\partial\alpha = i\left(\omega \wedge \bar{\partial}^*\alpha - \bar{\partial}^*(\omega \wedge \alpha)\right)$

(hypothèse kählérienne $\Rightarrow$ il suffit de traiter $X = \mathbb{C}^n$, $\omega = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k$.)

$\Rightarrow$ égalité des laplaciens $\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar\partial}$

$\Rightarrow \Delta_d \circlearrowright A^{p,q}(X)$ $\forall p, q$

$\Rightarrow \mathcal{H}^k(X)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X)$

$\mathcal{H}^k(X) \cap A^{p,q}(X)$

② Le théorème de Lefschetz difficile ("vache")

. X variété complexe compacte $\rightsquigarrow$ dualité de Poincaré :

$$\begin{array}{ccc} H^k(X) \otimes H^{2n-k}(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\alpha] \otimes [\beta] & \longmapsto & \int_X \alpha \wedge \beta \end{array}$$

pairing non dégénéré

$\Rightarrow H^k(X) \simeq H^{2n-k}(X)^\vee$ (compatible à la décomposition de Hodge)

. X variété kählérienne compacte, ω forme de Kähler, $[\omega] \in H^2(X)$

$\rightsquigarrow$ opérateur de Lefschetz $L : H^k(X) \xrightarrow{[\omega]\times -} H^{k+2}(X)$

Théorème : (Théorème de Lefschetz difficile) Pour $k = 0, \dots, n$

$$L^{n-k} : H^k(X) \xrightarrow{\sim} H^{2n-k}(X).$$

Remarque : implique $b_0 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, $b_1 \leq b_3 \leq \dots \leq b_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$.

Conséquence : Décomposition de Lefschetz

$$P^k(X) := \ker\left(L^{n-k+1} : H^k(X) \to H^{2n-k+2}(X)\right) \subset H^k(X)$$

(la partie primitive de la cohomologie)

On a : $H^k(X) = P^k(X) \oplus L P^{k-2}(X) \oplus L^2 P^{k-4}(X) \oplus \cdots \quad (k \leq n).$

Preuve du théorème de Lefschetz difficile :

- Identités kählériennes $\Rightarrow \Delta_d(\omega \wedge \alpha) = \omega \wedge \Delta_d(\alpha)$.

  $\Rightarrow L : \mathcal{H}^k(X) \to \mathcal{H}^{k+2}(X)$.

- Soit Λ l'adjoint de L $\quad (\alpha, \Lambda\beta) = (L\alpha, \beta)$

  On a $[L, \Lambda] = (k-n)\,\mathrm{id}$ sur les k-formes

- Implique que $L^{n-k} : \mathcal{H}^k(X) \to \mathcal{H}^{2n-k}(X)$ est injectif

- On conclut grâce au théorème de Hodge et à la dualité de Poincaré.

<u>Remarque</u> : On a une structure de $\mathfrak{sl}_2$-triplet sur $H^\cdot(X)$:

$(e = L,\ f = \Lambda,\ h = (k-n)\,\mathrm{id}$ sur $H^k(X))$

$P^\cdot(X) =$ l'espace de plus bas poids.

<u>Remarque</u> : Comme ω est de type $(1,1)$, $L_{\mathbb{C}} : H^{p,q}(X) \to H^{p+1,q+1}(X)$, et la décomposition de Lefschetz est compatible à la décomposition de Hodge.

Le théorème de Lefschetz ("faible") sur les sections hyperplanes

$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $H \simeq \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ un hyperplan.

$Y := H \cap X \hookrightarrow H$ une section hyperplane.

Théorème: (Théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes)

Le morphisme $H^k(X) \longrightarrow H^k(Y)$ est

- un isomorphisme pour $k \leq n-2$
- injectif pour $k = n-1$

Preuve: Dualité de Poincaré + suite exacte longue + annulation d'Artin

$$H^k(X \setminus Y) = 0 \quad \text{pour } k > n.$$

variété affine $\subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \setminus H = \mathbb{C}^N$.

Remarque: On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^k(X) \arrow[rr, "\times [H]"] \arrow[dr] & & H^{k+2}(X) \\ & H^k(Y) \arrow[ur, "\text{Gysin}"'] & \end{tikzcd}$$

donc Lefschetz difficile $\Rightarrow H^k(X) \hookrightarrow H^k(Y)$ pour $k \leq n-1$.

③ Inégalités de Hodge-Riemann

Dualité de Poincaré + Lefschetz difficile $\Longrightarrow$ pairing non dégénéré

$$Q : H^k(X) \otimes H^k(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$[\alpha] \otimes [\beta] \longmapsto \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-k}$$

(symétrique pour k pair, antisymétrique pour k impair ; compatible à la décomposition de Hodge et à la décomposition de Lefschetz)

<u>Théorème</u> : (Inégalités de Hodge-Riemann)

Pour $p+q=k$, sur $P^{p,q}(X) = H^{p,q}(X) \cap P^k(X)_{\mathbb{C}}$, la forme hermitienne

$$[\alpha] \otimes [\beta] \mapsto (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i^{p-q} Q_{\mathbb{C}}(\alpha, \bar{\beta})$$

est définie positive.

<u>Preuve</u> : $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i^{p-q} Q_{\mathbb{C}}(\alpha, \bar{\alpha}) = (n-k)! \times \|\tilde{\alpha}\|^2$.

représentant harmonique

Conséquence : théorème de l'indice de Hodge, pour $\dim_{\mathbb{C}}(X) \geq 2$.

(pour simplifier, on suppose que $H^2(X)_{\mathbb{C}} = H^{1,1}(X)$)

$$\underset{Q \text{ déf.} > 0}{H^2(X) = \mathbb{R}[\omega]} \oplus \underset{Q \text{ déf.} < 0}{P^2(X)}$$

Théorème : (Théorème de l'indice de Hodge)

Soient $\alpha, \beta \in H^2(X)$ telles que $Q(\beta,\beta) > 0$. Alors on a

$$Q(\alpha,\beta)^2 \geq Q(\alpha,\alpha)\,Q(\beta,\beta)$$

Preuve :

- $\alpha \in \mathbb{R}\beta \rightsquigarrow$ ok.
- $\alpha \notin \mathbb{R}\beta \rightsquigarrow$ vient du fait que $t \mapsto Q(t\alpha+\beta)$ doit changer de signe.

("Cauchy-Schwarz à l'envers")

Application :

$\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d' hyperplans linéaires $\longleftrightarrow$ matroïde M

$X = Y_{\mathcal{A}} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la compactification magnifique.

$H^{\cdot}(Y_{\mathcal{A}}) \simeq \mathbb{R}[x_F \,;\, F \text{ plat de } \mathcal{A},\, F \neq \hat{1}] / (\dots)$ $\quad (x_F \in H^2(Y_{\mathcal{A}}))$

$\alpha = \sum_{F \ni i} x_F \quad , \quad \beta = \sum_{F \not\ni i} x_F$ (β est une limite de classes de Kähler)

Si $\deg : H^{2n}(Y_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, alors $\deg(\alpha^{n-k}\beta^k) = \mu_k(M)$

(coefficients de $\overline{\chi}_M(t)$)

Théorème de l'indice de Hodge $\Longrightarrow$ $\mu_{n-1}(M)^2 \geqslant \mu_{n-2}(M)\,\mu_n(M)$.

En remplaçant M par une troncation on obtient :

Théorème : (HuK) $\quad \mu_k(M)^2 \geqslant \mu_{k-1}(M)\,\mu_{k+1}(M) \quad (\forall k = 1, \dots, n-1)$.