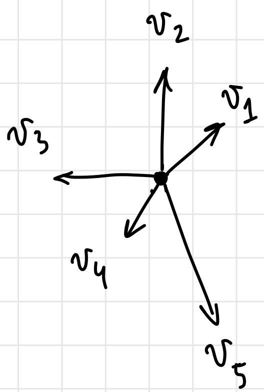
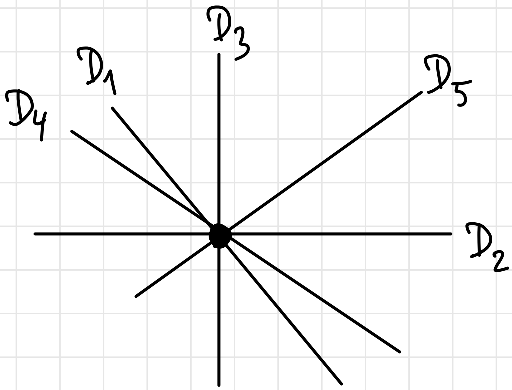
Un calcul de polynôme caractéristique

Soit un entier $n \geq 2$ et M_n le matroïde $U_{2,n}$.
L'ensemble sous-jacent est $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et les indépendants sont les parties de E_n de cardinal ≤ 2.
Il est représentable sur tout corps $\mathbb{K}$ assez grand et correspond à une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^2$ qui sont (non nuls et) deux à deux non colinéaires.

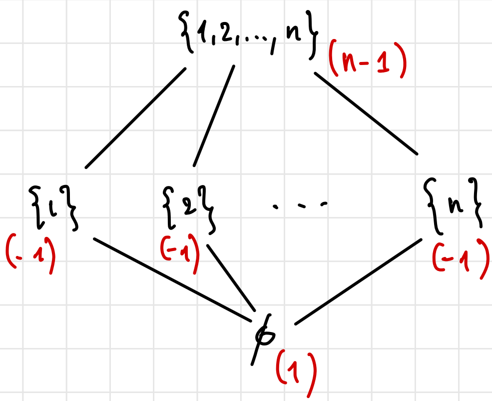


[Dans l'espace vectoriel dual $(\mathbb{K}^2)^*$ chaque v_i correspond à une droite $D_i = \langle v_i \rangle^{\perp}$ et l'image est celle d'un arrangement de n droites vectorielles :



]

Les flats de M_n sont $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$, et $\{1,2,\dots,n\}$ et donc correspondent au poset dont le diagramme de Hasse est :



[En rouge : les valeurs de $\mu(\emptyset, F)$.]

Le calcul de la fonction de Möbius est immédiat et donne comme polynôme caractéristique :

$$\chi_{M_n}(q) = q^2 - nq + (n-1) = (q-1)(q-(n-1))$$

[Oui, c'est un peu miraculeux qu'il soit scindé sur $\mathbb{Z}$...]

En tout cas, les racines de $\chi_{M_n}(q)$ sont 1 et $n-1$, ce qui répond par la négative à la question de Ricardo tout à l'heure :

" Est-ce que comme dans le cas des graphes, les $\chi_M(q)$ ont tous la propriété que

$$\{\text{racines de } \chi_M(q)\} \cap \mathbb{Z}_{\geq 1} = \{1, 2, \dots, N\}$$

pour un certain N ? "

<u>Remarque</u> : Les polynômes caractéristiques ne sont

généralement pas scindés sur $\mathbb{Z}$. En fait, un résultat de Sokal est que les racines des polynômes chromatiques des graphes sont denses dans $\mathbb{C}$...