Groupe de travail "Théorie de Hodge en combinatoire"

Séance introductive (15/09/20)

Une suite $a_0, a_1, \dots, a_n$ de réels

(1) est <u>unimodale</u> s'il existe $r \in \{0, \dots, n\}$ tel que

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$$

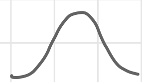
(2) est <u>log-concave</u> si

$$a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1} \quad (\forall k \in \{1, \dots, n-1\})$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \geq \frac{a_{k+1}}{a_k} \qquad \text{si } a_k > 0 \ \forall k$$

$(\log(a_k))$ est concave



$(2) \Rightarrow (1)$ si $a_k > 0 \ \forall k$.

<u>ex</u> : $a_k = \binom{n}{k}$.

[symétrique ; pas un comportement général]

<u>Slogan</u> : " La log-concavité d'une suite (naturelle) est toujours expliquée par la théorie de Hodge"

[Adiprasito-Huh-Katz '17]

<u>Théorème 1</u> : [H-K '12, conjecture de Mason-Welsh 60s]

$\mathbb{K}$ un corps, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^d$.

$\forall k$, $f_k :=$ le nombre de parties $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinal k telles que $(v_i)_{i \in I}$ est une famille libre.

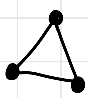
Alors $f_0, \dots, f_n$ est log-concave. [ex : $\binom{n}{k}$]

<u>Théorème 2</u> : [H '12, conjecture de Hoggar-Read 60s]

G un graphe fini à n sommets.

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\chi_G(q) :=$ le nombre de coloriages propres de G avec q couleurs

deux sommets adjacents ont des couleurs différentes

($G =$  $\rightsquigarrow \chi_G(q) = q(q-1)(q-2) = q^3 - 3q^2 + 2q$)

On écrit $\chi_G(q) = a_0 q^n - a_1 q^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$ [polynôme chromatique]

Alors $a_0, a_1, \dots, a_n$ est log-concave. [ex : 1,3,2 ; $\binom{n}{k}$]

Théorème 1 & 2

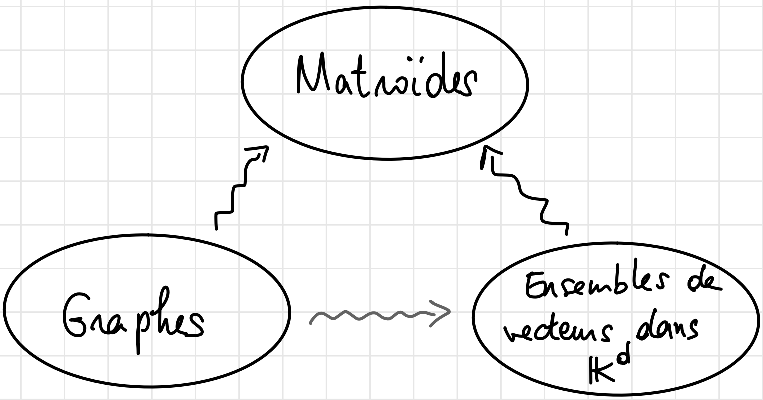
$\Uparrow$

<u>Théorème</u> : [AHK '17] Soit M un matroïde, soit

$$\chi_M(t) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{a_0}}\, t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$$

son polynôme caractéristique.

Alors $a_0, a_1, \dots, a_n$ est log-concave.



<u>Preuve</u> : dans le cas d'un ensemble de vecteurs dans $\mathbb{C}^d$ (matroïde représentable sur $\mathbb{C}$)

- interprétation des a_k comme "degrés mixtes" dans l'anneau de cohomologie d'une variété complexe projective lisse Y

$Y \twoheadrightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ résout les singularités de l'arrangement d'hyperplans (duaux aux vecteurs)

- Théorie de Hodge (contraintes sur la cohomologie des variétés kählériennes compactes) $\Rightarrow$ certaines formes bilinéaires sur $H^\cdot(Y)$ sont définies positives. "Inégalités de Hodge-Riemann"
$\Rightarrow$ inégalités de log-concavité : $\det\begin{pmatrix} b & c \\ a & b \end{pmatrix} \geqslant 0$.

<u>Cas général</u> : (non représentable sur $\mathbb{C}$) "théorie de Hodge purement combinatoire".

Autres exemples d'applications de la théorie de Hodge :
(combinatoire)

- volumes (mixtes) des corps convexes ($K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$ convexes compacts)

  Alexandrov-Fenchel : $\mathrm{vol}(K_1, K_2)^2 \geqslant \mathrm{vol}(K_1)\,\mathrm{vol}(K_2)$

  (Brunn-Minkowski : $\mathrm{vol}(K_1 + K_2)^{\frac{1}{2}} \geqslant \mathrm{vol}(K_1)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{vol}(K_2)^{\frac{1}{2}}$)

- travaux de McMullen sur les polytopes (nombre de faces).

- travaux d'Elias-Williamson (théorie de Hodge des bimodules de Soergel) $\Rightarrow$ résultats de positivité de certains coefficients apparaissant en théorie des représentations (groupes de Coxeter).

- géométrie diophantienne

  Hasse-Weil : $C/\mathbb{F}_q$ une courbe projective lisse

$$\left| \# C(\mathbb{F}_q) - (q+1) \right| \leq 2g\sqrt{q}\,.$$

1 - Langage des matroïdes

2 - Poset des plats, polynôme caractéristique

3 - Combinatoire énumérative des matroïdes (conjectures + résultats)

4 - Compactifications magnifiques 1 (construction)

5 - 〃 〃 2 (cohomologie)

6 - Preuve dans le cas représentable sur $\mathbb{C}$ (grâce à la théorie de Hodge)

7 - Théorie de Hodge 1 (décomposition de Hodge)

8 - 〃 〃 2 (Lefschetz difficile, HR)

9 - Géométrie torique

10 - Anneaux de Chow des variétés toriques

11 - Preuve dans le cas général

⋮

volumes mixtes des corps convexes (polytopes)