Anneau de Chow des variétés toriques

- X variété algébrique complexe, irréductible, de dimension n
- $\mathbb{C}(X)$ corps des fonctions rationnelles sur X
- Si X est affine, $\mathbb{C}[X]$ est l'anneau des fonctions régulières sur X.

I Groupes de Chow.

$$\mathcal{Z}(X) = \{ Z \subset X \text{ fermée, irréd.} \}$$
$$\cup$$
$\mathcal{Z}^k(X)$: celles de codim. k

$$Z(X) = \{ \sum_{Z \in \mathcal{Z}(X)} \lambda_Z Z \mid \underset{\text{à support fini}}{\lambda_Z \in \mathbb{Z}} \}$$
$$\parallel$$
$$\bigoplus_{k=0}^{n} Z^k(X) \ni \text{cycles}$$

Cas particulier. $k = 1$

$$Z^1(X) = \{\text{diviseurs de Weil}\} = \mathrm{Div}(X)$$

$\nu_X : \tilde{X} \longrightarrow X$ normalisation fini

- Si $f \in \mathbb{C}(X)^*$, on pose

$$\mathrm{div}_X(f) = \sum_{D \in \mathcal{Z}^1(\tilde{X})} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ordre d'annulation} \\ \text{de } f \text{ sur } D}}{\mathrm{ord}_D(f)} \, \nu_X(D)$$

Définition. $CH^1(X) = \underset{= Cl(X)}{Z^1(X) / \mathrm{Im}(\mathrm{div}_X)}$

(groupe des classes de diviseurs)

Cas général.

Définition.

$$CH^k(X) = Z^k(X) / \sum_{Y \in \mathcal{Z}^{k-1}(X)} \mathrm{div}_Y(\mathbb{C}(Y)^*)$$

k-ième groupe de Chow

$$CH(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} CH^k(X) \ni [Y] \quad \underset{\uparrow}{Y \in \mathcal{Z}^k(X)}$$

X lisse

1/ Groupe de Picard

$$CH^1(X) = Cl(X) = CaCl(X) = Pic(X) = \left\{ \begin{array}{l} \text{fibrés} \\ \text{en droite} \end{array} \right\} / \sim , \otimes$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_X\text{-modules} \\ \text{loc. libre de} \\ \text{rang } 1 \end{array} \right\} / \sim$$

$D \in Z^1(X)$: $\mathcal{O}_X(D)$ $\otimes_{\mathcal{O}_X}$

le fibré en droite associé à D.

Remarque.

$$H^0\Big(X, \mathcal{O}\Big(\sum_{D \in Z^1(X)} \lambda_D D\Big)\Big) = \{ f \in \mathbb{C}(X) \mid \mathrm{ord}_D(f) \geq -\lambda_D \}$$

Exemples. (1) Si X est affine telle que $\mathbb{C}[X]$ est factoriel, alors

$$CH^1(X) = 0$$

($\mathbb{C}^n$, et tous ses ouverts affines)

(2) $X = \mathbb{P}^n$

$$\deg : Z^1(\mathbb{P}^n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

$$Z \in Z^1(\mathbb{P}^n) \longmapsto \deg(f)$$

$Z = \text{Zéro}(f)$, f irréductible

Fait. $\mathrm{Ker}(\deg) = \mathrm{Im}\, \mathrm{div}_{\mathbb{P}^n}$

$$\mathbb{C}(\mathbb{P}^n) = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{C}(x_0, x_1, \dots, x_n) \;\middle|\; f \text{ et } g \text{ sont homog. de même degrés} \right\}$$

$$\frac{f}{g} = \prod_{i=1}^{n} f_i^{a_i}, \quad f_i \text{ irréd.}, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{div}_{\mathbb{P}^n}\left(\frac{f}{g}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \,\text{Zéro}(f_i) \in \mathrm{Ker}(\deg)$$

Conséquence. $CH^1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \cdot [H] \simeq \mathbb{Z}$

Hyperplan

Question. $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(dH))$?

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(dH))$$

$$= \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \text{ hom. de m̂ deg. tels que} \right.$$

$$\forall p \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n], \text{ irréd.} \neq x_0, \quad v_p\left(\frac{f}{g}\right) \geq 0$$

$$\left. v_{x_0}\left(\frac{f}{g}\right) \geq -d \right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0 \\ \left\{ \frac{f}{x_0^d} \;\middle|\; f \text{ homogène de deg } d \right\} & \text{si } d \geq 0 \end{cases}$$

$$\simeq \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]_d$$

(3) Si $U \underset{\text{ouvert}}{\overset{j}{\hookrightarrow}} X$ et $D = X \setminus U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ et irréd., alors :

- Si $\operatorname{codim}(D) \geq 2$, $CH^1(X) \simeq CH^1(U)$
- Si $\operatorname{codim} D = 1$, alors

$$\mathbb{Z} \cdot D \longrightarrow CH^1(X) \xrightarrow{j^*} CH^1(U) \to 0$$

Exemple. Si D est une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré d, alors

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}D & \to & CH^1(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & CH^1(\mathbb{P}^n \setminus D) & \to & 0 \\ & & \wr\wr & & \wr\wr & & \\ & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & & \\ & & \psi & & & & \\ D & \longmapsto & d & & & & \end{array}$$

III Groupe de Picard des variétés toriques.

- $X = X_\Sigma$
  Σ éventail

III Groupe de Picard des variétés toriques.

- $X = X_\Sigma$
  Σ éventail

- T tore de dim. n, $M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}^n$

$$\mathbb{C}[T] = \mathbb{C}M = \bigoplus_{u \in M} \mathbb{C}\cdot t^u$$

$$N = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T) \simeq \mathbb{Z}^n$$

$$T = \mathbb{C}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} N$$

$$v(\xi) \longleftarrow\!\shortmid \xi \otimes v$$

$$\langle\ ,\ \rangle : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, \mathbb{C}^\times)$$

$$(u, v) \longmapsto u \circ v$$

- $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ ← ouvert torique affine

$X_\sigma \supset O_\sigma$ unique T-orbite fermée

Rappels.

- X_Σ lisse $\iff \forall \sigma \in \Sigma$, σ est engendré par une partie d'une base de N
  $(X_\sigma \simeq (\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^s)$

- $\{T\text{-orbites de } X\} \longleftrightarrow \Sigma$

$$O_\sigma \longleftarrow\!\shortmid \sigma$$

$$\mathrm{codim}(O_\sigma) = \dim \sigma := \dim(\mathbb{R}\sigma)$$

- $\Sigma(k) = \{\sigma \in \Sigma \mid \dim \sigma = k\}$

$$\mathrm{Div}(X_\Sigma)^T =: \mathrm{Div}_T(X_\Sigma) = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} D_\rho$$

$$D_\rho = \overline{O_\rho}$$

Théorème. On suppose que $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\Sigma$. Alors on a une suite exacte

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Div}_T(X_\Sigma) \xrightarrow{\mathrm{can}} CH^1(X_\Sigma) \to 0$$

Preuve. . Si $u \in M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$

$$\mathrm{div}_{X_\Sigma}(t^u) =: \alpha(u) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle u, v_\rho \rangle D_\rho$$

où $\rho \cap N = \mathbb{N} v_\rho$.

(calcul dans X_ρ : on écrit
$N = \mathbb{Z} v_\rho \oplus N'$
$X_\rho \simeq \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^\times)^{n-1}$
$D_\rho \cap X_\rho = O_\rho = \{0\} \times (\mathbb{C}^\times)^{n-1}$

$u = (u_1, \dots, u_n)$; $u_1 = \langle u, v_\rho \rangle$
et $\mathrm{ad}_{D_\rho}(t^u) = u_1$)

- α est injective car $N_{\mathbb{R}}$ est engendré par Σ, $N_{\mathbb{R}}$ est engendré par $\Sigma(1)$.

- can est surjective par applications répétées de la suite exacte ouvert-fermé.

$$CH^1(X_\Sigma \setminus \bigcup_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho) = CH^1(T) = 0$$

- exactitude : $\mathrm{div}_{X_\Sigma}(f) \overset{?}{\in} \mathrm{Div}_T(X_\Sigma)$
$\iff f = \lambda t^u$, $u \in M$. ∎

Corollaire. Si $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\Sigma$, alors

$CH^1(X_\Sigma)$ est sans torsion, de rang $|\Sigma(1)| - n$.

Sections globales.

$$|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$$

$$D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho \quad , \quad a_\rho \in \mathbb{Z}$$

On définit une fonction continue, linéaire sur chaque face de Σ, via :

$$\psi_D(v_\rho) = -a_\rho$$

$\rightsquigarrow$ polytope

$$P_D = \{ u \in M_\mathbb{R} \mid \forall \rho \in \Sigma(1), \langle u, v_\rho \rangle \geq -a_\rho \}$$
$$= \{ u \in M_\mathbb{R} \mid \forall v \in |\Sigma|, \langle u, v \rangle \geq \psi_D(v) \}$$

Proposition. $H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}(D)) = \bigoplus_{u \in P_D \cap M} \mathbb{C}\, t^u$

Exemple : $X_\Sigma = \mathbb{P}^n$

$$T = (\mathbb{C}^\times)^n \qquad M \simeq \mathbb{Z}^n \; ; \; N \simeq \mathbb{Z}^n$$
$$M = \bigoplus_{k=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_k \; ; \; N = \bigoplus_{k=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_k^\vee$$

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [x_0 : t_1 x_1 : \dots : t_n x_n]$$

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{k=0}^n V_k \quad \rightsquigarrow x_k \neq 0$$

$$V_k = X_{\sigma_k}$$

- $V_0 = \mathbb{C}^n$. $\sigma_0^\vee = \sum_{k=0}^n \mathbb{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_k$

$$\rightsquigarrow \sigma_0 = \sum_{k=0}^n \mathbb{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_k^\vee$$

- $k \geq 1$: $V_k \simeq \mathbb{C}^n$

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$
$$= (t_k^{-1} x_0, t_k^{-1} t_1 x_1, \dots \dots)$$

$$\sigma_k = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \mathbb{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_j^\vee \quad , \quad \varepsilon_0^\vee = -\varepsilon_1^\vee - \dots - \varepsilon_n^\vee$$

$$D_k = \{x_k = 0\} \leftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} e_k^\vee \subset \Sigma(1)$$

$$D = \sum_{k=0}^{n} a_k D_k$$

$$\alpha(u_1, \dots, u_n) = u_1 D_1 + \dots + u_n D_n - (u_1 + \dots + u_n) D_0$$

$$D \sim (a_0 + a_1 + \dots + a_n) D_0$$

$$\rightsquigarrow CH^1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} . [D_0]$$

$$M \cap P_{dD_0} = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n \mid u_i \geq 0 \text{ si } i \geq 1, \ u_1 + \dots + u_n \leq d\}$$

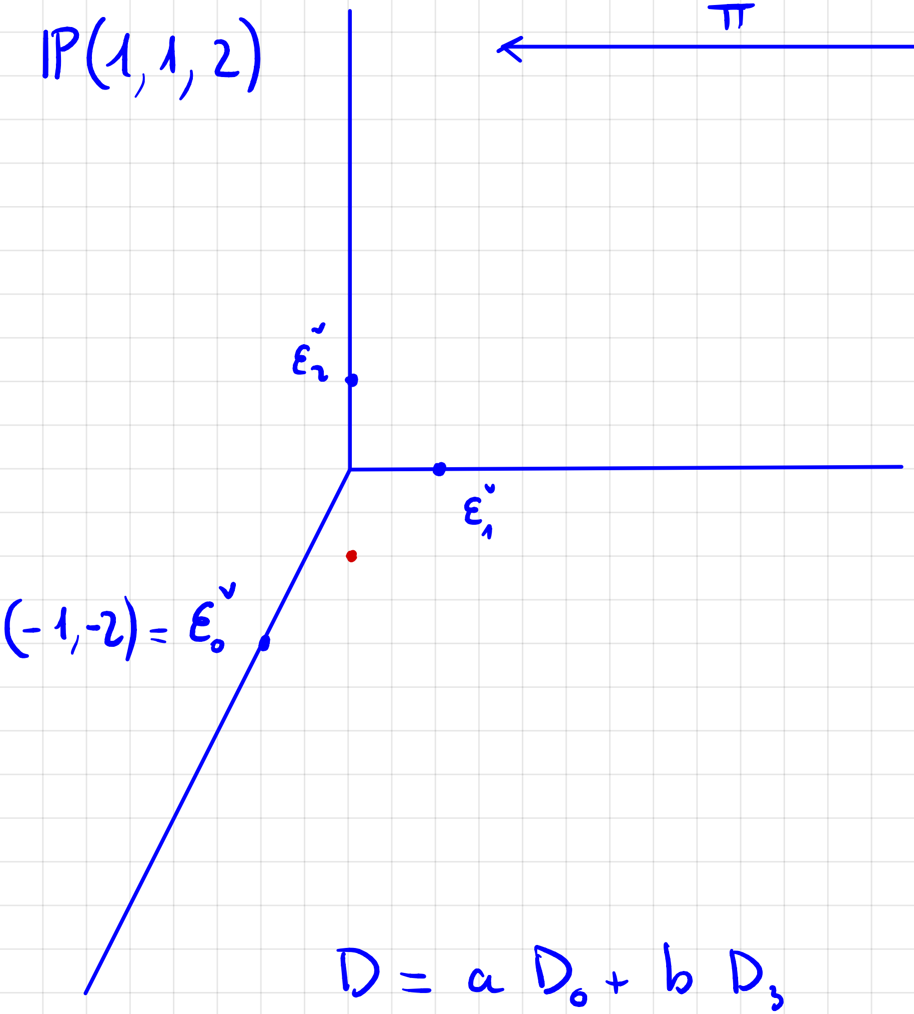
$$\updownarrow 1:1$$

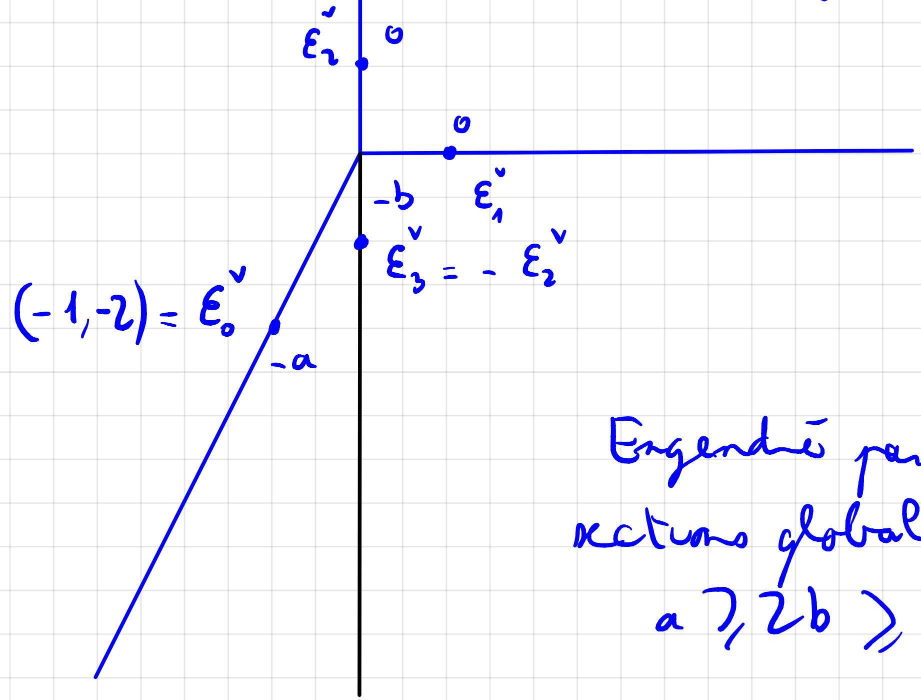
$$\{(u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid u_i \geq 0, \ u_0 + u_1 + \dots + u_n = d\}$$

Proposition. $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections globales ssi ψ_D est convexe (supérieurement) (Hyp. cônes max. de dim. n)

Proposition. $\mathcal{O}(D)$ est ample $\Leftrightarrow$ (X_Σ complète) ψ_D est strictement convexe (pas linéaire sur la réunion de deux cônes de dim n).

$$\mathbb{P}(1,1,2) \xleftarrow{\ \pi\ } \widetilde{\mathbb{P}(1,1,2)}$$





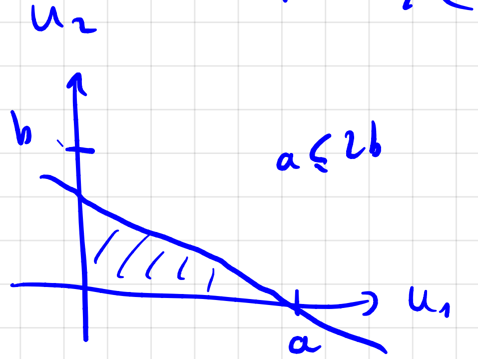
$$CH^1\left(\widetilde{\mathbb{P}(1,1,2)}\right) \simeq \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[D_0] \oplus \mathbb{Z}[D_3]$$

Engendré par les sections globales

$a \geq 2b \geq 0$

$$D = a D_0 + b D_3$$

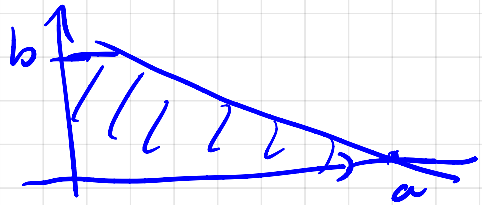
$$P_D = \{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_2 \leq b,\ u_1 + 2u_2 \leq a\}$$



$a \leq 2b$

$P_D \neq \emptyset \iff a, b \geq 0$

$a \geq 2b$



amplitude.

$a > 2b > 0$