UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2020-2021**
M1 Mathématiques HMMA114

Contrôle Final

Exercice 1. Est-ce que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe ? Démontrer le résultat. Même question pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient a, b, c trois réels. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de décrire $\exp(M)$ sans la calculer explicitement.

1. Montrer que $\exp(M)$ est une matrice orthogonale.
2. Montrer que 1 est valeur propre de $\exp(M)$ et déterminer un vecteur propre pour cette valeur propre.
3. Montrer que $\exp(M)$ est une rotation.
4. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
5. Donner la forme réduite de Jordan complexe de M, puis la forme de Jordan réduite réelle de M.
6. Déterminer l'axe et l'angle (non-orienté) de la rotation $\exp(M)$.

Exercice 3.

1. Montrer que $\exp : \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est surjective.
2. Montrer que M est dans l'image de $\exp : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $N \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $N^2 = M$.

Exercice 4. On considère les points $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$, $D = (0, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Soit G le sous-groupe de $\mathrm{O}(2)$ qui laisse $\mathcal{C} := \{A, B, C, D\}$ stable.

1. Déterminer le stabilisateur de A dans G.
2. Montrer que G agit transitivement sur $\mathcal{C}$.
3. Montrer que G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $\{\pm I_2\}$ est un sous-groupe distingué de G.
5. Y a t-il des éléments d'ordre 4 dans le groupe quotient $G/\{\pm I_2\}$?
6. Trouver quatre représentations de degré 1 non-équivalentes de G.
7. En déduire le caractère de la cinquième représentation irréductible de G.
8. Dresser la table des caractères de G (en particulier, déterminer les classes de conjugaison dans G).