UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 S6**
HLMA602 Calcul diff. et équa. diff. **Année 2020-2021**

Contrôle final

Durée : 2h00 — Documents et instruments électroniques interdits.

Lemme de Grönwall (rappel) : Soient $d \in \mathbb{R}_+^*$ et $K \in \mathbb{R}$. Soit $y : [0, d[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Soit $z : [0, d[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que

$$\forall t \in [0, d[, \qquad z(t) \leq K + \int_0^t y(s)z(s)ds.$$

Alors on a

$$\forall t \in [0, d[, \qquad z(t) \leq K \exp\left(\int_0^t y(s)ds\right).$$

Exercice 1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction $k : I \to \mathbb{R}$ continue, à valeurs positives telle que pour tout $t \in I$, x_1, $x_2 \in U$,

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k(t)\|x_1 - x_2\|.$$

Soit $x_0 \in U$. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution maximale $x :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy.

On veut montrer que $b = \sup I$. On suppose par l'absurde que $b \in I$.

2. Déterminer une constante C telle que pour tout $t \in [0, b[$,

$$\|x(t)\| \leq C + \int_0^t k(s)\|x(s)\|ds$$

3. Appliquer le Lemme de Grönwall à la fontion $\|x(t)\|$.
4. Conclure.
5. Peut-on déduire de ce qu'on a montré que la solution maximale x est globale ?
6. Démontrer le lemme de Grönwall.

Exercice 2. Montrer que l'équation

$$z^3 + 2x + e^z - x - y^2 = \cos(x - y + z)$$

définit implicitement z comme fonction de x et y au voisinage du point $(0,0)$. Calculer la dérivée partielle de cette fonction par rapport à la variable x en $(0,0)$.

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' &= 2x - 4y \\ y' &= x + 6y \end{cases}$$

Indication : on peut trigonaliser facilement une matrice 2×2 *dont on connait un seul vecteur propre. Il suffit d'y ajouter un vecteur non colinéaire quelconque et de travailler dans la base de* $\mathbb{R}^2$ *ainsi obtenue.*

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = x^2 + ay^4.$$

1. Déterminer les points critiques de g selon la valeur de a.
2. Déterminer quand ces points critiques sont des extrema locaux.
3. Déterminer sous quelles conditions les points critiques de g sont des minimums globaux.
4. Trouver une intégrale première pour le champ de vecteur $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par
$$F(x,y) = (4ay^3, -2x).$$
5. On suppose $a \geq 0$, montrer que ce champ de vecteur est complet.