UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2021-2022**
M1 Mathématiques HAX707X

Contrôle continu final

Exercice 1.

1. Démontrer le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.
2. Démontrer l'existence d'une unique racine carrée symétrique réelle positive pour toute matrice symétrique réelle positive.
3. Démontrer la décomposition polaire pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. On considère d'abord l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ par équivalence :

$$(A,B)\cdot M = AMB^{-1}$$

1. Justifier que cette action est continue.
2. Décrire les orbites pour cette action.
3. Quelle est l'adhérence de l'orbite de I_2 ? (le démontrer)

On considère maintenant l'action de $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ par conjugaison :

$$A\cdot M = AMA^{-1}$$

4. Justifier que cette action est continue.
5. Décrire les orbites pour cette action.
6. Lesquelles sont compactes ? (le démontrer)

On considère maintenant le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}\subset\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle :

$$\mathcal{V} := \mathrm{tr}^{-1}(\{0\}).$$

7. Montrer que $\mathcal{V}$ est stable par l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par conjugaison.
8. Montrer que le morphisme associé à l'action factorise en un morphisme injectif de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ vers $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$.

On note maintenant ι ce morphisme injectif, on veut expliciter son image. On note $E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

9. Déterminer l'image de E, F et H sous l'action d'un élément $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
10. En déduire une description matricielle de l'image de ι.
11. Montrer que ι est continue (où la topologie au départ est la topologie quotient, et la topologie à l'arrivée est la topologie induite).
12. Montrer que $\iota|_{\mathrm{PSU}(2)}$ est un homéomorphisme de $\mathrm{PSU}(2)$ sur son image, où $\mathrm{PSU}(2)$ est l'image de $\mathrm{SU}(2)$ par le quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 3. Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on associe l'ensemble

$$\mathrm{O}(A) := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid M^T A M = A\}.$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(A)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer toutes les matrices A pour lesquelles $\mathrm{O}(A) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser les matrices élémentaires par exemple.)
3. On considère maintenant le cas $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $X := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $\exp(\lambda X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\exp(\lambda X) \in \mathrm{O}(A)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Le sous-groupe $\mathrm{O}(A)$ est-il compact ?
   (c) En utilisant des matrices par blocs (dont on précisera les tailles), montrer que $\mathrm{O}(A)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^* \times \mathrm{O}(2)$. Le groupe $\mathrm{O}(A)$ est-il connexe ?

Exercice 4. On considère la matrice $S := \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\exp(S) \in \mathrm{O}(3)$, déterminer de quel type d'isométrie il s'agit ainsi que ses données caractéristiques (par ex. axe et angle non-orienté). *On ne demande pas de calculer l'exponentielle explicitement.*

Exercice 5. Montrer que la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ est homéomorphe à G/H, où $G = \mathrm{SO}(n)$ et H est le sous-groupe de $\mathrm{SO}(n)$ formé par les matrices diagonales par blocs $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathrm{SO}(n-1)$.